Semaine 18 - du 6 au 10 février

Topologie des espaces vectoriels normés (début)

Topologie des espaces vectoriels normés

Ouverts : définition et exemples
Stabilité de l'ensemble des ouverts
Voisinages
Fermés : définition et exemples
Stabilité de l'ensemble des fermés
Points intérieurs d'une partie ; intérieur $\mathring{X}$
L'intérieur de X est le plus grand ouvert inclus dans X
Points adhérents à une partie ; adhérence $\overline{X}$
L'adhérence de X est le plus petit fermé contenant X
Caractérisation séquentielle des points adhérents et des fermés
Frontière d'une partie
Partie A dense dans un espace vectoriel E
Les notions topologiques (ouverts, fermés, adhérence, intérieur, densité) ne sont pas modifiée si on remplace la norme de l'espace vectoriel par une norme équivalente
Soit $A \subset E$. Définition des parties ouvertes (resp. fermée) relativement à A.
Les ouverts (resp. fermés) relatifs de A sont les traces dans A des ouverts (resp. fermés) de E.

Limites

Limite d'une fonction f définie sur A en un point a adhérent à A. Extension à $a = \infty$.
Une fonction admettant une limite en a est bornée au voisinage de a.
Caractérisation séquentielle de la limite
Cas des applications à valeurs dans un produit d'espace vectoriel normés. Le produit étant normé par la norme produit.
Limite d'une composée, d'une combinaison linéaire, d'un produit

Continuité

Fonctions continues en $a \in A$. Fonctions continues sur A
Caractérisation séquentielle de la continuité.
Invariance de la continuité en remplaçant les normes par des normes équivalentes
Continuité d'une composée, d'une combinaison linéaire, d'un produit.
Unicité du prolongement continue d'une fonction définie sur une partie dense
Image réciproque d'un ouvert / d'un fermé par une application continue
Applications uniformément continues ; uniformément continue implique continue
Applications lipschitziennes ; lipschitzienne implique uniformément continue.
Les applications **linéaires** sont continues si et seulement si elles sont lipschitziennes