MP2 2022 – 2023

Semaine 19 - du 27 février au 3 mars

Topologie des espaces vectoriels normés (suite)

Topologie des espaces vectoriels normés

Reprise du programme précédent

Compacité

Définition d'une partie compacte A d'un espace vectoriel normé par la propriété de Bolzano-Weierstrass : toute suite d'élément de A admet une valeur d'adhérence.
La notion de compacte ne change pas si on remplace la norme par une norme équivalente
Une partie compacte est fermée et bornée : réciproque fausse en général
Soit X une partie d'un compact A. Elle est compacte si et seulement si elle est fermée (dans A)
Une suite (u_n) d'un compact converge si et seulement si elle a une unique valeur d'adhérence.
Un produit fini de compacts est compact.
Une l'image d'un compact par une application continue est un compact
Théorème des bornes atteintes pour les applications à valeurs dans $\mathbf{R}$
Théorème de Heine : Toute fonction continue sur un compact est uniformément continue

Espaces vectoriels de dimension finie

Toutes les normes sont équivalentes
Une partie A d'un espace vectoriel de dimension finie est compacte si et seulement elle est fermée bornée.
Une suite bornée converge si et seulement si elle a une unique valeur d'adhérence
Les sous-espaces vectoriels sont fermés
Les applications linéaires sont continues
Les applications multilinéaires sont continues.
Les applications polynomiales sont continues

Séries à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie

Convergence et absolue convergence
Séries géométriques et exponentielles de matrices

Connexité par arcs

Chemin de A allant de x à y.
La relation $(x\mathscr{R}_A y) \iff$ (il existe un chemin de A de x à y) est une relation d'équivalence
Parties étoilée
On a les implications (convexe) $\Rightarrow$ (étoilée) $\Rightarrow$ (connexe par arcs) : réciproque fausse en général.
Composantes connexes par arcs
L'image d'une partie connexe par arcs par une application continue est connexe par arcs