Exercice

Soit A et B deux parties d'un espace vectoriel normé. On note $A+B$ l'ensemble $\{a+b \mid (a,b) \in A\times B\}$.

1. *Soit K un compact et F un fermé. Montrer que $K+F$ est fermé.*
2. *Déterminer deux fermés F, F' tels que la somme $F+F'$ n'est pas fermée.*
   On pourra considérer $F = \{-k\ ,\ k \in \mathbf{N}\}$ et $F' = \{\ell + \frac{1}{\ell}\ ,\ \ell \in \mathbf{N} \setminus \{0,1\}\}$.
3. *Soit K et L deux compacts. Montrer que $K+L$ est compact.*
4. *Soit K et L deux compacts. Montrer que la réunion des segments joignant un point de K et un point de L est compact.*

Solution :

1. Montrons que $K+F$ est fermé par caractérisation séquentielle. Soit $(x_n)_{n\geqslant 0} \in (K+F)^{\mathbf{N}}$ une suite d'éléments de $K+F$. On suppose que la suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers ℓ. Il faut montrer que $\ell \in K+F$.

   Pour tout $n \in \mathbf{N}$, il existe $(k_n, f_n) \in K \times F$ tels que $x_n = k_n + f_n$.

   Le problème vient alors du fait que la convergence de la suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ n'implique pas que les suites $(k_n)_{n\geqslant 0}$ et $(f_n)_{n\geqslant 0}$ convergent. On va alors utiliser que K est compact pour se ramener au cas où la suite $(k_n)_{n\geqslant 0}$ converge.

   Comme K est compact, il existe une extractrice $\varphi : \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N}$ telle que la suite $(k_{\varphi(n)})_{n\geqslant 0}$ converge dans K. Notons k sa limite. On en déduit que la suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge comme différence de deux suites convergentes. De plus $\lim(f_n) = \ell - k$. En utilisant alors que F est fermé, $\ell - k \in F$ et donc $\ell \in K+F$.

   Par caractérisation séquentielle, on a bien montré que $K+F$ est fermé.

2. Considérons $F = \{-k\ ,\ k \in \mathbf{N}^*\}$ et $F' = \{\ell + \frac{1}{\ell}\ ,\ \ell \in \mathbf{N} \setminus \{0,1\}\}$. Montrons que ce sont des fermés et que $F+F'$ n'est pas fermé.

   — On utilise la caractérisation séquentielle pour montrer que F est fermé. Soit $(x_n)_{n\geqslant 0} \in F^{\mathbf{N}}$ une suite d'éléments de F qui l'on suppose convergente. Notons ℓ sa limite. On sait qu'une suite d'entiers qui converge est stationnaire [1] En particulier $\ell \in F$. Cela montre que F est fermé.

   — Montrons que de même F' est fermé. Soit u, v dans F' avec $u \neq v$. On note $u = \ell + \frac{1}{\ell}$ et $v = \ell' + \frac{1}{\ell'}$. Par symétrie on suppose que $\ell > \ell'$. On voit alors que

   $$u - v = \left(\ell + \frac{1}{\ell}\right) - \left(\ell' + \frac{1}{\ell'}\right) = (\ell - \ell') - \left(\frac{1}{\ell'} - \frac{1}{\ell}\right) \geqslant 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

   La dernière inégalité vient du fait que $\ell - \ell' \geqslant 1$ et que $\frac{1}{\ell'} - \frac{1}{\ell} \leqslant \frac{1}{\ell'} \leqslant \frac{1}{2}$.
   En recopiant l'argument précédent, on montre de même que toutes les suites à valeurs dans F' qui convergent sont stationnaires. On en déduit que F' est fermé.

   — Pour tout $n \geqslant 2$, on pose $x_n = \frac{1}{n} = (-n) + n + \frac{1}{n} \in F+F'$. La suite $(x_n)_{n\geqslant 2}$ est une suite d'éléments de $F+F'$ qui converge vers 0 mais $0 \notin F+F'$ car $F+F'$ ne contient pas d'entiers. On a donc montré que $F+F'$ n'est pas fermé.

1. Par définition de la convergence pour $\varepsilon = \frac{1}{3}$, il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que pour $n \geqslant N$, $|x_n - \ell| \leqslant \frac{1}{3}$. On en déduit que pour $n \geqslant N$,

$$|x_n - x_N| = |(x_n - \ell) - (x_N - \ell)| \leqslant |x_n - \ell| + |x_N - \ell| \leqslant \frac{2}{3}$$

Cela implique que $x_n = x_N$. On a bien prouvé que la suite était stationnaire.

3. Montrons que $K+L$ est compact. Soit $(x_n)_{n\geqslant 0} \in (K+L)^{\mathbf{N}}$ une suite d'éléments de $K+L$. Pour tout $n\in\mathbf{N}$, il existe $(k_n,\ell_n)\in K\times L$ tels que $x_n = k_n+\ell_n$.

   Comme K est compact, il existe une extractrice $\varphi : \mathbf{N}\to\mathbf{N}$ telle que $(k_{\varphi(n)})_{n\geqslant 0}$ converge. On considère alors la suite $(\ell_{\varphi(n)})_{n\geqslant 0}\in L^{\mathbf{N}}$. Comme L est compact, il existe une extractrice $\psi : \mathbf{N}\to\mathbf{N}$ telle que $(\ell_{\varphi(\psi(n))})_{n\geqslant 0}$ converge. La suite $(k_{\varphi(\psi(n))})_{n\geqslant 0}$ converge car c'est une sous-suite d'une suite convergente. On en déduit que la $(x_{\varphi(\psi(n))})_{n\geqslant 0}$ est une sous-suite convergente de $(x_n)_{n\geqslant 0}$. Cela montre que $K+L$ est compact.

   Il est important de procéder comme ci-dessus, en faisant d'abord la deuxième extraction en partant de la suite $(\ell_{\varphi(n)})_{n\geqslant 0}$ et non pas de la suite $(\ell_n)_{n\geqslant 0}$.

4. Pour tout u,v dans E le segment $[u,v]$ est l'ensemble $[u,v]=\{tu+(1-t)v\ ,\ t\in[0,1]\}$. On étudie donc

$$X=\bigcup_{(k,\ell)\in K\times L}[k,\ell]=\{tk+(1-t)\ell\ ,\ (k,\ell,t)\in K\times L\times[0,1]\}$$

   On procède comme ci-dessus. Soit $(x_n)_{n\geqslant 0}\in X^{\mathbf{N}}$ une suite d'éléments de X. Pour tout $n\in\mathbf{N}$, il existe $(k_n,\ell_n,t_n)\in K\times L\times[0,1]$ tels que $x_n=t_nk_n+(1-t_n)\ell_n$.

   Comme K est compact, il existe une extractrice $\varphi : \mathbf{N}\to\mathbf{N}$ telle que $(k_{\varphi(n)})_{n\geqslant 0}$ converge. On considère alors la suite $(\ell_{\varphi(n)})_{n\geqslant 0}\in L^{\mathbf{N}}$. Comme L est compact, il existe une extractrice $\psi : \mathbf{N}\to\mathbf{N}$ telle que $(\ell_{\varphi(\psi(n))})_{n\geqslant 0}$ converge. On considère la suite $(t_{\varphi(\psi(n))})_{n\geqslant 0}$. Comme $[0,1]$ est un compact (car c'est un segment de $\mathbf{R}$), il existe une extractrice θ telle que $(t_{\varphi(\psi(\theta(n)))})_{n\geqslant 0}$ converge.

   Les suites $(k_{\varphi(\psi(\theta(n)))})_{n\geqslant 0}$, $(\ell_{\varphi(\psi(\theta(n)))})_{n\geqslant 0}$ et $(t_{\varphi(\psi(\theta(n)))})_{n\geqslant 0}$ convergent. Notons $k\in K$, $\ell\in L$ et $t\in[0,1]$ leur limite respective. La suite $(x_{\varphi(\psi(\theta(n)))})_{n\geqslant 0}$ tend vers $tk+(1-t)\ell\in X$. Cela montre que X est bien un compact.

Exercice

Dans chacun des cas suivants, étudier l'existence en $(0,0)$ de la limite de f :

a) $f(x,y)=(x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$ *b)* $f(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2}$ *c)* $f(x,y)=\frac{x(x-y)}{x^2+y^2}$

d) $f(x,y)=\frac{xy^2}{x^4+y^2}$ *e)* $f(x,y)=\frac{x^2y}{x^4+y^2}$ *f)* $f(x,y)=\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$

Solution :

a) Montrons que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$. Il suffit de voir que pour $(x,y)\neq(0,0)$,

$$|f(x,y)|\leqslant x^2+y^2=||(x,y)||_2^2$$

Quand on veut montrer qu'une fonction définie sur une partie de $\mathbf{R}^2$ a une limite en un point, on cherche d'abord la valeur ℓ de la limite. Ensuite on majore $|f(x,y)-\ell|$ par des termes qui font apparaitre la norme de $\mathbf{R}^2$; ici on peut utiliser la norme que l'on veut car toutes les normes sont équivalentes sur $\mathbf{R}^2$ puisque c'est un espace vectoriel de dimension finie.

b) Montrons que f n'a pas de limite en $(0,0)$.

Quand on veut montrer qu'une fonction f définie sur une partie de $\mathbf{R}^2$ n'a pas de limite en un point (x_0,y_0). On peut chercher deux « manières » de tendre vers (x_0,y_0) qui donnent des limites différentes. C'est-à-dire *que l'on cherche des fonctions $h_1 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$ et $h_2 = \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$ telles que $h_1(0) = h_2(0) = (x_0, y_0)$ et telles que les fonctions $f \circ h_1$ et $f \circ h_2$ n'ont pas la même limite en 0.*

On voit que pour $x \in \mathbf{R}^*$, $f(x,0) = 0$ donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x,0) = 0$. De même pour $x \in \mathbf{R}^*$, $f(x,x) = \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$ donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x,x) = \frac{1}{2} \neq 0$. Cela montre que f n'a pas de limite en $(0,0)$.

c) Montrons que f n'a pas de limite en $(0,0)$.

On voit que pour $y \in \mathbf{R}^*$, $f(0,y) = 0$ donc $\lim\limits_{y\to 0} f(0,y) = 0$. De même pour $x \in \mathbf{R}^*$, $f(x,0) = \frac{x^2}{x^2} = 1$ donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x,0) = frm[o]-- \neq 0$. Cela montre que f n'a pas de limite en $(0,0)$.

a) Montrons que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

Soit $(x,y) \neq (0,0)$.

- Si $y \neq 0$, $|f(x,y)| \leqslant \frac{|x|y^2}{y^2} = |x| \leqslant \sqrt{x^2+y^2} = ||(x,y)||_2$.
- Si $y = 0$, $|f(x,y)| = 0 \leqslant ||(x,y)||_2$.

On en déduit que pour tout $(x,y) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $|f(x,y)| \leqslant ||(x,y)||_2 \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$.

On a bien $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.