Exercice (Décomposition polaire)

1. *Montrer que pour tout $S \in S_n^+(\mathbf{R})$, il existe une matrice $R \in S_n^+(\mathbf{R})$ telle que $S = R^2$.*
2. *Soit $A \in GL_n(\mathbf{R})$. Montrer qu'il existe un couple $(U, S) \in O_n(\mathbf{R}) \times S_n^{++}(\mathbf{R})$ tel que $A = US$.*
3. *Montrer que la matrice R de la question 1) est unique ; en déduire que la décomposition de la question 2) est aussi unique.*
4. *Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$. Déterminer la décomposition polaire de A.*

Solution :

Pour $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ dans $\mathbf{R}$, on note $\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ la matrice D diagonale définie par

$$\forall (i,j) \in [\![1\,;\, n]\!]^2, D[i,j] = \begin{cases} \lambda_i & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Soit $S \in S_n(\mathbf{R})$. D'après le théorème spectral, il existe $Q \in O_n(\mathbf{R})$ telle que $Q^\top SQ$ soit diagonale. On note $Q^\top SQ = \Delta = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Comme $S \in S_n^+(\mathbf{R})$ on sait que $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont des réels positifs. On pose alors $D = \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$ qui vérifie que $D^2 = \Delta$ puis $R = QDQ^\top$.

   Vérifions que R est la matrice cherchée :
   - La matrice R vérifie que $R^2 = QDQ^\top QDQ^\top = QD^2Q^\top = Q\Delta Q^\top = S$.
   - La matrice R est symétrique réelle car $R^\top = (QDQ^\top)^\top = (Q^\top)^\top D^\top Q^\top = QDQ^\top = R$.
   - La matrice R est positive puisque $\mathrm{Sp}(R) = \mathrm{Sp}(D) = \{\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}\} \subset \mathbf{R}_+$.

   On a bien trouvé $R \in S_n^+(\mathbf{R})$ telle que $R^2 = S$.
2. Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$. On suppose dans un premier temps qu'il existe un couple $(U, S) \in O_n(\mathbf{R}) \times S_n^{++}(\mathbf{R})$ tel que $A = US$. On considère alors $M = A^\top A = (US)^\top US = S^\top U^\top US = S^2$ car $U \in O_n(\mathbf{R})$ et $S \in S_n(\mathbf{R})$. Par ailleurs, $M \in S_n^+(\mathbf{R})$, en effet
   - La matrice M est symétrique réelle car $M^\top (A^\top A)^\top = A^\top (A^\top)^\top = A^\top A = M$
   - Soit $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$, $X^\top MX = X^\top A^\top AX = (AX)^\top AX = ||AX||^2 \geqslant 0$.

   En utilisant la question 1) on sait qu'il existe une matrice $S \in S_n^+(\mathbf{R})$ telle que $M = S^2$. De plus,

   $$\det(S)^2 = \det(S^2) = \det(M) = \det(A^\top A) = \det(A)^2 \neq 0$$

   Cela montre que $S \in S_n^+(\mathbf{R}) \cap \mathrm{GL}_n(\mathbf{R}) = S_n^{++}(\mathbf{R})$. On pose alors $U = AS^{-1}$ et on vérifie que

   $$U^\top U = (AS^{-1})^\top AS^{-1} = (S^{-1})^\top A^\top AS^{-1} = (S^\top)^{-1}S^2S^{-1} = S^{-1}S = I_n$$

   On a donc montré que $U \in O_n(\mathbf{R})$. Le couple $(U, S) \in O_n(\mathbf{R}) \times S_n^{++}(\mathbf{R})$ vérifie bien que $A = US$.
3. On veut maintenant montrer que la matrice R de la question 1) est l'unique matrice de $S_n^+(\mathbf{R})$ dont le carré est égal à S. On considère donc une matrice $R \in S_n^+(\mathbf{R})$ telle que $R^2 = S$. On procède comme pour la question 1), il existe $Q \in O_n(\mathbf{R})$ telle que $Q^\top SQ = \Delta$ soit diagonale. On pose alors $T = Q^\top RQ$.

La matrice T appartient encore à $S_n^+(\mathbf{R})$ car $T^\top = T$ et que $\mathrm{Sp}(T) = \mathrm{Sp}(R) \subset \mathbf{R}_+$.
De plus $T^2 = Q^\top R^2 Q = Q^\top S Q = \Delta$.
On en déduit que T et Δ commutent car $T\Delta = TT^2 = T^2T = \Delta T$. De ce fait les espaces propres de Δ sont stables par T. On note dès lors $\mu_1, \dots, \mu_p$ les valeurs propres deux à deux distinctes de Δ (ou de S).
Pour tout $i \in [\![1 ; p]\!]$ on note r_i la multiplicité de la valeur propre μ_i.
On en déduit que T est nécessairement diagonale par blocs,

$$T = \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_p \end{pmatrix}$$

où, pour tout $i \in [\![1 ; p]\!]$, $A_i \in \mathscr{M}_{r_i}(\mathbf{R})$. On voit de plus que comme $T \in S_n^+(\mathbf{R})$ alors, pour $i \in [\![1 ; p]\!]$, $A_i \in S_{r_i}^+(\mathbf{R})$. Elle sont en effet symétriques réelles et $\mathrm{Sp}(A_i) \subset \mathrm{Sp}(T) \subset \mathbf{R}_+$. De plus, pour tout $i \in [\![1 ; p]\!]$, $A_i^2 = \mu_i I_{r_i}$.
On peut alors utiliser le théorème spectral ; pour tout $i \in [\![1 ; p]\!]$, il existe $P_i \in O_{r_i}(\mathbf{R})$ telle que $N_i = P_i^\top A_i P_i$ soit diagonale. On sait que $N_i^2 = P_i^\top A_i^2 P_i = \mu_i I_{r_i}$ et que de plus $\mathrm{Sp}(N_i) = \mathrm{Sp}(A_i) \subset \mathbf{R}^+$. Cela implique que tous les coefficients diagonaux de N_i sont égaux et valent $\sqrt{\mu_i}$. La matrice N_i étant scalaire, $A_i = P_i N_i P_i^\top = N_i$. On a donc montré que nécessairement

$$T = \begin{pmatrix} \sqrt{\mu_1} I_{r_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\mu_p} I_{r_p} \end{pmatrix}$$

C'est la matrice D trouvée lors de la question 1). Finalement $R = QTQ^\top$ est la matrice de la question 1). Il existe bien une unique matrice $R \in S_n^+(\mathbf{R})$ telle que $R^2 = S$.
On en déduit que la décomposition polaire trouvée à la question 2) est aussi unique car nécessairement, S est l'unique matrice de $S_n^+(\mathbf{R})$ telle que $S^2 = A^\top A$ puis U est nécessairement égale à AS^{-1}.

4. On commence par calculer $M = A^\top A = I + 5J$ où J est la matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbf{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1. On cherche à « diagonaliser M en base orthonormée ». C'est-à-dire que l'on cherche une base orthonormée de vecteurs propres de M. Il suffit pour cela de le faire pour J.
On sait que $X_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)^\top \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{R})$, vérifie $JX_1 = 3X_1$. De plus, J étant de rang 1, son noyau est de dimension 1 ; il reste à en trouver une base orthonormée. Le vecteur $X_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0)^\top \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{R})$, vérifie $JX_2 = 0$. On considère finalement $X_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, -2)^\top \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{R})$ qui appartient aussi à $E_0(J)$ et qui est orthogonal à X_2. On pose donc

$$Q = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -2 \end{pmatrix} \in O_3(\mathbf{R})$$

Par construction $Q^\top J Q = \mathrm{diag}(3, 0, 0)$. On en déduit que $Q^\top M Q = \mathrm{diag}(16, 1, 1)$.

On pose donc $S = Q\mathrm{diag}(4, 1, 1)Q^\top = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ puis $U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.