

1. C'est du cours.
2. Évaluons $x_{n+1}(t) - x_n(t)$.

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbf{N}^*, \forall t \in I, x_{n+1}(t) - x_n(t) &= x_0 + \int_{t_0}^t a(u)(x_n(u)) + b(u)du - x_0 - \int_{t_0}^t a(u)(x_{n-1}(u)) + b(u)du \\ &= \int_{t_0}^t a(u)(x_n(u) - x_{n-1}(u))du \end{aligned}$$

La dernière égalité utilise que pour tout $u \in I$, $a(u)$ est linéaire.

3. La fonction a est supposée continue de I dans $\mathcal{L}(E)$ (en particulier en utilisant la norme $\|\cdot\|_{\text{op}}$ sur l'ensemble d'arrivé). Comme I est un compact (c'est un segment). Il existe M tel que pour tout $t \in I$, $\|a(t)\|_{\text{op}} \leq M$.
Par définition de la norme subordonnée, pour vecteur $y \in E$ et tout $t \in E$,

$$\|a(t)(y)\|_E \leq \|a(t)\|_{\text{op}}\|y\|_E \leq M\|y\|_E$$

Donc pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ et tout $t \in I$,

$$\|a(t)(x_n(t) - x_{n-1}(t))\|_E \leq M\|x_n(t) - x_{n-1}(t)\|_E$$

4. Pour $t \geq t_0$,

$$\begin{aligned} \|x_2(t) - x_1(t)\|_E &= \left\| \int_{t_0}^t a(u)(x_1(u) - x_0(u))du \right\| \\ &\leq \int_{t_0}^t \|a(u)(x_1(u) - x_0(u))\|_E du \\ &\leq \int_{t_0}^t M\|x_1(u) - x_0(u)\|_E du \\ &\leq \int_{t_0}^t M\|x_1 - x_0\|_{\infty} du \\ &\leq (t - t_0)M\|x_1 - x_0\|_{\infty} \end{aligned}$$

En procédant de même quand $t \leq t_0$ on a alors $\|x_2(t) - x_1(t)\|_E \leq |t - t_0|M\|x_1 - x_0\|_{\infty}$.

Soit $t_0 \in I$ fixé. Montrons par récurrence sur n que pour tout $n \geq 1$:

$$H(n) : \forall t \in I, \|x_{n+1} - x_n(t)\|_E \leq \frac{M^n |t - t_0|^n}{n!} \|x_1 - x_0\|_{\infty}$$

- **I** Le cas $n = 1$ a été traité ci-dessus.
- **H** Soit $n \geq 1$. On suppose $H(n)$ et on montre $H(n + 1)$.

Pour $t \geq t_0$,

$$\begin{aligned} \|x_{n+1}(t) - x_n(t)\|_E &= \left\| \int_{t_0}^t a(u)(x_n(u) - x_{n-1}(u))du \right\| \\ &\leq \int_{t_0}^t \|a(u)(x_n(u) - x_{n-1}(u))\|_E du \\ &\leq \int_{t_0}^t M\|x_n(u) - x_{n-1}(u)\|_E du \\ &\leq \int_{t_0}^t \frac{M^{n+1} |t - t_0|^n}{n!} \|x_1 - x_0\|_{\infty} du \\ &\leq \frac{M^{n+1} (t - t_0)^{n+1}}{(n + 1)!} \|x_1 - x_0\|_{\infty} \end{aligned}$$

Le cas pour $t \leq t_0$ est similaire et on obtient $H(n + 1)$.

Comme $|t - t_0| \leq \ell$ où ℓ est la longueur de l'intervalle, on a

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \forall t \in I, \|x_{n+1}(t) - x_n(t)\|_E \leq \frac{M^n \ell^n}{n!} \|x_1 - x_0\|_\infty.$$

5. Le résultat précédent permet d'écrire que

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \|x_{n+1} - x_n\|_\infty \leq \frac{M^n \ell^n}{n!} \|x_1 - x_0\|_\infty.$$

Cela permet de montrer que la série $\left(\sum_{n \geq 0} \|x_{n+1} - x_n\|_\infty\right)$ converge, ce qui signifie que la série de fonctions $\left(\sum_{n \geq 0} x_{n+1} - x_n\right)$ converge normalement donc uniformément sur I . Notons S sa somme. Maintenant, pour tout $N \geq 1$, par télescopage

$$X_N = x_0 + \sum_{n=0}^{N-1} x_{n+1} - x_n \xrightarrow{CU} x_0 + S$$

La suite de fonctions (x_n) converge uniformément sur I .

6. Notons x la limite de (x_n) , il reste à montrer que x est bien la solution cherchée. Par construction, pour tout entier n et tout $t \in I$,

$$x_{n+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^t a(u)(x_n(u)) + b(u) du$$

Soit $n \in \mathbf{N}$. On pose $z_n : t \mapsto a(t)(x_n(t)) + b(t)$ et $z : t \mapsto a(t)(x(t)) + b(t)$.

Pour tout $t \in I$,

$$\|z_n(t) - z(t)\|_E = \|a(t)(x_n(t) - x(t))\|_E \leq M \|x_n(t) - x(t)\|_E$$

On en déduit que

$$\|z_n - z\|_\infty \leq M \|x_n - x\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Cela signifie que la suite (z_n) converge uniformément vers z sur le segment I . On a donc bien, en utilisant que I est un segment,

$$\forall t \in I, x(t) = x_0 + \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{t_0}^t z_n(u) du = x_0 + \int_{t_0}^t z(u) du = x_0 + \int_{t_0}^t a(u)(x(u)) + b(u) du$$

La fonction x est bien solution du problème de Cauchy.

7. On suppose avoir deux fonctions x_1 et x_2 vérifiant notre problème de Cauchy (sous sa forme intégrale). On a alors

$$\forall t \in I, x_1(t) - x_2(t) = \int_{t_0}^t a(u)(x_1(u) - x_2(u)) du.$$

On peut répéter les calculs des questions 4 et 5 pour obtenir que

$$\forall n \in \mathbf{N}, \|x_1 - x_2\|_\infty \leq \frac{M^n \ell^n}{n!} \|x_1 - x_2\|_\infty$$

En faisant tendre n vers ∞ , on obtient bien que $\|x_1 - x_2\|_\infty = 0$ et donc $x_1 = x_2$.

8. Si I n'est plus un segment. On sait que pour tout segment $K \subset I$, il existe une unique solution x_K du problème de Cauchy sur K . Maintenant pour tout $t \in I$ et K, K' deux segments dans I qui contiennent t . On peut considérer le plus petit segment dans I contenant K et K' . Par unicité de la solution sur ce segment on a $x_K(t) = x_{K'}(t)$. De ce fait, on peut construire une fonction $x : t \mapsto x_K(t)$ où K est un segment qui contient t .