

Le but de ce devoir est de prouver le théorème de Cauchy linéaire

### Théorème

Soit

$$(PC) \begin{cases} x'(t) = a(t)x(t) + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

un problème de Cauchy linéaire d'ordre 1 vectoriel en particulier les fonctions  $a$  et  $b$  sont **continues**. Il admet une unique solution.

Dans toute la suite  $E$  sera un espace vectoriel de dimension finie notée  $p$ ,  $I$  un **segment** de  $\mathbf{R}$  et  $a, b$  deux fonctions continues de  $I$  dans  $\mathcal{L}(E)$ . On note  $\ell$  la longueur de  $I$ ,  $\|\cdot\|_E$  une norme de  $E$  et  $\|\cdot\|_\infty$  la norme infinie des fonctions de  $I$  dans  $E$  (relativement à  $\|\cdot\|_E$ ) et  $\|\cdot\|_{\text{op}}$  la norme subordonnée à  $\|\cdot\|_E$ .

1. Montrer qu'une fonction  $x \in \mathcal{C}^1(I, E)$  vérifie (PC) si et seulement si

$$\forall t \in I, x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t a(u)x(u) + b(u)du$$

Par la suite, on procède par approximations. On considère la fonction  $x_0$  définie sur  $I$  par  $x_0 : t \mapsto x_0$  et, pour tout entier  $n$ , on pose

$$x_{n+1} : t \mapsto x_0 + \int_{t_0}^t a(u)x_n(u) + b(u)du$$

Le but est alors de démontrer que la suite de fonctions  $(x_n)$  converge une fonction  $x$  qui sera la solution cherchée. De plus, il faut montrer que cette convergence est uniforme afin de pouvoir appliquer les théorèmes usuels d'intégration.

2. Justifier que  $\forall n \in \mathbf{N}^*, \forall t \in I$ ,

$$x_{n+1}(t) - x_n(t) = \int_{t_0}^t a(u)(x_n(u) - x_{n-1}(u))du.$$

3. Justifier qu'il existe  $M \in \mathbf{R}$ , tel que  $\forall t \in I, \|a(t)\|_{\text{op}} \leq M$  et que pour tout  $n \in \mathbf{N}^*$

$$\|a(t)(x_n(t) - x_{n-1}(t))\|_E \leq M\|x_n(t) - x_{n-1}(t)\|_E$$

4. En déduire que

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \forall t \in I, \|x_{n+1}(t) - x_n(t)\|_E \leq \frac{M^n \ell^n}{n!} \|x_1 - x_0\|_\infty$$

5. En déduire que la suite de fonction  $(x_n)$  converge uniformément vers une fonction  $x$ .

*On pourra faire apparaître une série de fonctions.*

6. Vérifier que la fonction  $x$  est solution du problème de Cauchy.

7. Montrer l'unicité de la solution du problème de Cauchy.

*On pourra considérer deux solutions et, en procédant comme ci-dessus, montrer que la norme infinie de la différence est nulle.*

8. Comment étendre le résultat au cas où  $I$  n'est pas un segment ?