A - Prolongement harmonique

1) La partie $T = \{z \in \mathbb{C}\ ;\ |z| = 1\}$ est un compact de $\mathbb{C}$. En effet, pour $z \in T$, $|z| \leqslant 1$ donc T est borné. De plus $N : z \mapsto |z|$ est continue donc $T = N^{-1}(\{1\})$ est fermé comme image réciproque d'un fermé par une application continue. Comme $\mathbb{C}$ est un espace vectoriel de dimension finie, T est bien compact.

La fonction f est supposée continue sur T. Elle est donc bornée d'après le théorème des bornes atteintes. Notons $||f||_\infty$ la norme infinie de f.

Pour $n \in \mathbb{Z}$,

$$|c_n| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})e^{-int}dt\right| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(e^{it})|dt \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}||f||_\infty dt = ||f||_\infty$$

Pour $z \in D$ et $n \in \mathbb{N}$, $|c_n z^n| \leqslant ||f||_\infty |z|^n$ et $|c_{-n}\overline{z}^n| \leqslant ||f||_\infty |z|^n$

Or la série géométrique $\sum \|f\|_\infty |z|^n$ de raison $|z| < 1$ est convergente donc, par comparaison, les séries $\sum\limits_{n\geqslant 1} c_n z^n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1} c_{-n}\overline{z}^n$ sont absolument convergentes donc convergentes.

Finalement, $\boxed{\text{la fonction } g_f \text{ est bien définie sur } D \text{ tout entier.}}$

2) Soit $(x_0; y_0) \in \widetilde{D}$, montrons que $\widetilde{S}$ admet une dérivée partielle par rapport à x en $(x_0; y_0)$ autrement dit que $s : x \mapsto \widetilde{S}(x; y_0)$ est bien définie au voisinage de x_0 et qu'elle est dérivable en x_0.

On sait que $\widetilde{S}$ est définie sur $\widetilde{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\ ,\ x^2 + y^2 < 1$. En particulier, pour y_0 fixé, s est définie sur $I =]-(1-y_0^2), 1-y_0^2[$ qui est un voisinage de x_0.

Considérons la suite de fonctions définies par $f_n : x \in I \mapsto a_n(x + iy_0)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par définition, la série $\sum f_n$ converge simplement vers s sur I autrement dit $s = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ sur I. Vérifions les hypothèses du théorème de dérivation terme à terme :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I par composition. De plus, $f_n'(x) = na_n(x + iy_0)^{n-1}$ pour tout x de I.
- La série $\sum f_n$ converge simplement sur I vers s.
- Montrons que la série des dérivées $\sum f_n'$ converge normalement donc uniformément sur tout segment $[-\alpha, \alpha]$ inclus dans I. Soit $\alpha < 1 - y_0^2$, on pose $\rho = \sqrt{\alpha^2 + y_0^2} < 1$.
  Pour tout n de $\mathbb{N}^*$:
  $$\forall x \in [-\alpha; \alpha], \quad |f_n'(x)| = n|a_n||x + iy_0|^{n-1} \leqslant n|a_n|\sqrt{x^2 + y_0^2}^{\,n-1} \leqslant n|a_n|\rho^{n-1}$$
  On en déduit que $||f_n'||_{\infty,[-\alpha,\alpha]} \leqslant n|a_n|\rho^{n-1}$.
  On sait que la série entière $\sum na_n z^{n-1}$ a le même rayon de convergence que la série entière $\sum a_n z^n$. Il est donc supérieur ou égal à 1. Comme $\rho < 1$, la série $\sum \|f_n'\|_{\infty,[-\alpha,\alpha]}$ à termes positifs converge (i.e. $\sum f_n'$ converge normalement sur $[-\alpha, \alpha]$) par comparaison à la série à termes positifs $\sum n|a_n|\rho^{n-1}$ convergente.

Le théorème de dérivation de dérivation terme à terme assure donc que s est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I donc en x_0 et que $s' = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n'$.

Finalement, nous avons que $\boxed{\widetilde{S} \text{ admet une dérivée partielle selon } x \text{ en tout point de } \widetilde{D}}$

De plus

$$\boxed{\frac{\partial \widetilde{S}}{\partial x}(x_0; y_0) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(x_0 + iy_0)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}(x_0 + iy_0)^n \qquad \forall (x_0; y_0) \in \widetilde{D}}$$

Pour finir, soit u la somme sur D de la série entière $\sum (n+1)a_{n+1}z^n$ de la variable complexe z; comme D est est inclus dans l'ouvert de convergence de u (car c'est le même que celui de $\sum a_n z^n$), u est bien définie et continue comme fonction de la variable z sur D. Ainsi

$\boxed{\frac{\partial \widetilde{S}}{\partial x} = \tilde{u} \text{ est continue comme fonction de deux variables sur } \widetilde{D}.}$

3) Soit $(x_0; y_0) \in \widetilde{D}$, montrons que $\widetilde{S}$ admet une dérivée partielle par rapport à y en $(x_0; y_0)$ autrement dit que $w : x \mapsto \widetilde{S}(x_0; y)$ est bien définie au voisinage de y_0 et qu'elle est dérivable en y_0. On travaille cette fois sur $I =]-(1-x_0^2), 1-x_0^2[$.

Les calculs sont similaires à ceux de la question précédente. On pose cette fois $w_n : y \mapsto a_n(x_0 + iy)^n$ qui sont des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ de dérivées $w_n' : y \mapsto ina_n(x_0 + iy)^n$.

On montre de même que la série $\sum w_n'$ converge normalement donc uniformément sur tout segment $[-\alpha, \alpha] \subset I$ ce qui montre que w est de classe $\mathscr{C}^1$.

Donc $\boxed{\widetilde{S} \text{ admet une dérivée partielle selon } y \text{ en tout point de } \widetilde{D}}$ donnée par :

$$\boxed{\frac{\partial \widetilde{S}}{\partial y}(x_0; y_0) = \sum_{n=1}^{\infty} ina_n(x_0 + iy_0)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} i(n+1)a_{n+1}(x_0 + iy_0)^n \qquad \forall (x_0; y_0) \in \widetilde{D}}$$

La continuité de $\frac{\partial \widetilde{S}}{\partial y}$ est similaire à ce qui a été fait à la question précédente.

Soit la suite définie par $d_n = (n+1)a_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La série entière $\sum d_n z^n$ a même rayon de convergence que $\sum a_n z^n$, on peut appliquer la question précédente 2) et le premier point de cette question à $\sum d_n z^n$ ce qui permet de conclure que

$$\widetilde{u} : (x_0; y_0) \in \widetilde{D} \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} d_n(x_0 + iy_0)^n = \frac{\partial \widetilde{S}}{\partial x}(x_0; y_0)$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\widetilde{D}$. On a même

$$\boxed{\forall (x_0; y_0) \in \widetilde{D},\ \frac{\partial^2 \widetilde{S}}{\partial x^2}(x_0; y_0) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)a_{n+2}(x_0 + iy_0)^n \text{ et } \frac{\partial^2 \widetilde{S}}{\partial y \partial x}(x_0; y_0) = i\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)a_{n+2}(x_0 + iy_0)^n}$$

On en déduit par multiplication par i que $i\frac{\partial \widetilde{S}}{\partial x} = \frac{\partial \widetilde{S}}{\partial y}$ est aussi de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\widetilde{D}$ et donc la fonction $\boxed{\widetilde{S} \text{ est de classe } \mathscr{C}^2 \text{ sur } \widetilde{D}}$, on a de plus trouvé : $\forall (x_0; y_0) \in \widetilde{D}$

$$\frac{\partial^2 \widetilde{S}}{\partial x^2}(x_0; y_0) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)a_{n+2}(x_0 + iy_0)^n \text{ et } \frac{\partial^2 \widetilde{S}}{\partial y^2}(x_0; y_0) = i^2\frac{\partial^2 \widetilde{S}}{\partial x^2}(x_0; y_0) = -\frac{\partial^2 \widetilde{S}}{\partial x^2}(x_0; y_0)$$

Donc par somme $\boxed{(\Delta S)(z) = 0 \text{ pour tout } z \text{ de } D.}$

4) On a vu à la question 1) que pour tout entier n, $|c_n(f)| \leqslant ||f||_\infty$ et $|\overline{c_{-n}(f)}| = |c_{-n}(f)| \leqslant ||f||_\infty$. On en déduit que les séries entières $\sum_{n \geqslant 1} c_n(f)z^n$ et $\sum_{n \geqslant 1} \overline{c_{-n}(f)}z^n$ ont un rayon de convergence supérieur ou égal à 1.

On pose alors

$$u : z \mapsto c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n(f)z^n \text{ et } v : z \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \overline{c_{-n}(f)}z^n$$

De ce fait, pour tout $z \in D$,

$$g_f(z) = u(z) + \overline{v(z)}$$

D'après la question 3), les fonctions u et v sont de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\widetilde{D}$ (et de laplacien nul). Par somme et composition et conjugaison, la fonction g_f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\widetilde{D}$ donc $\boxed{g_f \text{ est } \mathscr{C}^2 \text{ sur } D}$.

Par linéarité et le fait que la conjugaison complexe commute à la dérivation on a alors

$$\forall z \in D,\ \ \Delta g_f(z) = \Delta u(z) + \overline{\Delta v(z)} = 0 + 0 = 0$$

5) Soit z dans D, on commence par remarquer que

$$\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}=\frac{1+ze^{-it}}{1-ze^{-it}}=(1+ze^{-it})\sum_{n=0}^{+\infty}(ze^{-it})^n=\sum_{n=0}^{+\infty}(ze^{-it})^n+\sum_{n=1}^{+\infty}(ze^{-it})^n=1+2\sum_{n=1}^{+\infty}(ze^{-it})^n$$

où on a utilisé la formule de la somme d'une série géométrique de raison ze^{-it} avec $|ze^{-it}|=|z|<1$.
En utilisant alors que pour tout $\omega\in\mathbb{C}$, $2\mathrm{Re}(\omega)=\omega+\overline{\omega}$, on obtient que

$$P_z(t)=2\mathrm{Re}\left(\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\right)=1+\sum_{n=1}^{+\infty}(ze^{-it})^n+\sum_{n=1}^{+\infty}(\overline{z}e^{it})^n$$

D'autre part, par définition des c_n et linéarité de l'intégrale, on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty}c_nz^n=\frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\int_{-\pi}^{\pi}f(e^{it})e^{-int}z^n\,dt$$

Les fonctions $u_n:t\in[-\pi;\pi]\mapsto f(e^{it})e^{-int}z^n$ sont continues par composition et la série $\sum u_n$ converge uniformément car normalement sur le segment $[-\pi;\pi]$: en effet pour tout t de $[-\pi;\pi]$, on a $|u_n(t)|\leqslant|z|^n\|f\|_\infty$, donc $\|u_n\|_\infty\leqslant|z|^n\|f\|_\infty$ d'où la convergence de la série à termes positifs $\sum\|u_n\|_\infty$ par comparaison à la série géométrique $\sum|z|^n\|f\|_\infty$ convergente car de raion $|z|<1$.
Ainsi, on peut intégrer terme à terme $\sum u_n$ sur $[-\pi;\pi]$, ce qui donne

$$\sum_{n=1}^{+\infty}c_nz^n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}f(e^{it})e^{-int}z^n\right)dt$$

Pour les des raisons similaires, on obtient

$$\sum_{n=1}^{+\infty}c_{-n}\overline{z}^n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}f(e^{it})e^{int}\overline{z}^n\right)dt$$

Ainsi par somme et par linéarité de l'intégrale, on obtient à l'aide des deux expressions précédentes,

$$\begin{aligned}g_f(z)&=1+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}f(e^{it})e^{int}\overline{z}^n\right)dt+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}f(e^{it})e^{-int}z^n\right)dt\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(1+\sum_{n=1}^{+\infty}f(e^{it})e^{int}\overline{z}^n+\sum_{n=1}^{+\infty}f(e^{it})e^{-int}z^n\right)dt\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(e^{it})P_z(t)dt\end{aligned}$$

6) Pour tout n de $\mathbb{N}$, on obtient pour tout $k\in\mathbb{Z}$,

$$c_k(p_n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}p_n(e^{it})e^{-kt}\,dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{i(n-k)t}\,dt=\delta_{k,n}\text{ avec }\delta_{k,n}\text{ le symbole de Kronecker}$$

De même, on obtient

$$c_k(q_n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}q_n(e^{it})e^{-kt}\,dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-i(n+k)t}\,dt=\delta_{k,-n}$$

On en déduit que g_{p_n} et g_{q_n} sont les fonctions définies sur D par $\boxed{g_{p_n}:z\mapsto z^n \text{ et } g_{q_n}:z\mapsto\overline{z}^n}$. Par abus on notera donc $g_{p_n}=p_n$ et $g_{q_n}=q_n$.

En particulier pour $f=p_0=1$, on obtient $\boxed{1=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P_z(t)\,dt\quad\forall z\in D.}$

Pour $t\in\mathbb{R}$ et $z\in D$,

$$P_z(t)=\mathrm{Re}\left(\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\right)=\frac{\mathrm{Re}\left((e^{it}+z)\ (e^{-it}-\bar{z})\right)}{|e^{it}-z|^2}=\frac{1-|z|^2}{|e^{it}-z|^2}>0\text{ car }|z|<1$$

7) Soit $h \in \mathscr{C}(T)$. Pour $z \in D$, en utilisant la question 5.b)

$$|g_f(z) - g_h(z)| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})P_z(t)dt - \int_{-\pi}^{\pi} h(e^{it})P_z(t)dt\right| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi}(f-h)(e^{it})P_z(t)dt\right|$$

En utilisant l'inégalité triangulaire et que $P_z(t)$ est un réel positif, on a alors

$$|g_f(z) - g_h(z)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|(f-h)(e^{it})|P_z(t)dt$$

Or, pour $t \in [-\pi, \pi]$, $e^{it} \in T$ donc $|(f-h)(e^{it})| \leqslant ||f-h||_\infty$ et finalement, en utilisant que $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_z(t)dt = 1$,

$$|g_f(z) - g_h(z)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}||f-h||_\infty P_z(t)dt \leqslant ||f-h||_\infty$$

Comme de plus, pour $z \in T$, $|G_f(z) - G_h(z)| = |f(z) - h(z)| \leqslant ||f-h||_\infty$, on a finalement que pour tout $z \in \overline{D}$, $|G_f(z) - G_h(z)| \leqslant ||f-h||_\infty$ et donc

$$||G_f - G_h||_{\infty, D} \leqslant ||f-h||_\infty$$

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathscr{C}(T)$ qui converge uniformémént sur T vers f. Pour tout entier n,

$$||G_{f_n} - G_f||_{\infty,\overline{D}} \leqslant ||f_n - f||_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

On en déduit que (G_{f_n}) converge uniformément vers G_f sur $\overline{D}$.

8) On a vu à la question 6) que $G_{p_k} = p_k$ et $G_{q_k} = q_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ où, par abus, on note encore p_k et q_k les fonctions définies sur $\overline{D}$ définies par $z \mapsto z^k$ et $z \mapsto \overline{z}^k$. De plus, par linéarité de l'intégrale, pour tout entier relatif $n \in \mathbb{Z}$, la fonction qui à $g \in \mathscr{C}(T)$ associe $c_n(g)$ est linéaire. On en déduit que pour $r \in \mathscr{P}(T)$, $G_r = r$ (toujours avec le même abus de notations).

Maintenant, comme $f \in \mathscr{C}(T)$, il existe une suite (r_n) d'éléments de $\mathscr{P}(T)$ qui converge uniformément vers f d'après le théorème de Weierstrass trigonométrique. D'après ce qui précède, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $G_{r_n} = r_n$.

D'après la question 7) comme chaque fonction r_n est bien continue sur T, la suite G_{r_n} converge donc uniformément vers G_f sur $\bar{D}$. Cela montre finalement que G_f est limite uniforme sur $\overline{D}$ de la suite de fonctions continues (r_n) et donc $\boxed{\text{que } G_f \text{ est continue sur } \overline{D}}$

9) Posons $h : z \mapsto |z|^2$. En utilisant les notations de l'énoncé, $\widetilde{h} : (x, y) \mapsto x^2 + y^2$. On en déduit que

$$\forall z = (x+iy) \in D, \Delta h(z) = \frac{\partial^2 \widetilde{h}}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 \widetilde{h}}{\partial y^2}(x,y) = 2 + 2 = 4$$

Donc, par linéarité, $\boxed{\Delta u(z) = \Delta G(z) + \Delta u(z) = 0 + 4\varepsilon > 0}$

Comme u est une fonction de $\bar{D}$ dans $\mathbb{R}$ continue sur le compact $\bar{D}$, elle y est bornée et atteint ses bornes, en particulier son maximum : il existe $z_0 = x_0 + iy_0 \in \bar{D}$ tel que $u(z) \leqslant u(z_0)$ pour tout $z \in \bar{D}$.

Si z_0 est dans D alors $\widetilde{u_x} : x \mapsto \widetilde{u}(x; y_0)$ est définie sur un intervalle ouvert contenant x_0 et par restriction atteint un maximum en x_0. Comme $\widetilde{u_x}$ est de classe $\mathscr{C}^2$ (par composition), on a donc $\widetilde{u_x}'(x_0) = 0$ et $\widetilde{u_x}''(x_0) \leqslant 0$ (cf le lemme démontré ci-après) c'est-à-dire $\frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial x^2}(x_0, y_0)) \leqslant 0$. En considérant $\widetilde{u_y} : y \mapsto \widetilde{u}(x_0; y)$, les mêmes arguments conduisent à $\frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial y^2}(x_0, y_0) \leqslant 0$, ainsi par somme $\Delta u(z_0) \leqslant 0$, ce qui contredit le premier point de la question.

Ainsi z_0 est dans T, donc $G(z_0) = 0$ et $|z_0| = 1$ d'où $u(z_0) = \varepsilon$ et donc $\boxed{\forall z \in \bar{D}, \quad u(z) \leqslant \varepsilon}$

Démontrons par l'absurde le lemme utilisé précédemment à savoir que si v est une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur un intervalle I atteint un maximum en x_0 point intérieur à I alors $''(x_0) \leqslant 0$. On a déjà que $v'(x_0) = 0$, supposons $v''(x_0) > 0$, alors par continuité de $''$, il existe un intervalle ouvert I' centré en x_0 contenu dans I sur lequel $''$ reste strictement positif, donc v' est strictement croissante sur I'. Or $v'(x_0) = 0$, donc $v' < 0$ sur $I' \cap] - \infty; x_0[$, et donc v est décroissante sur ce même intervalle, ce qui contredit le fait que v admette un maximum en x_0.

10) Montrons que si $G : \bar{D} \to \mathbb{R}$ vérifie (a1) pour $f = 0$, (a2) et (a3) alors $G = 0$ i.e. $G = G_f$.
Pour tout $\varepsilon > 0$, d'après la question 9, on a $G(z) + \varepsilon|z|^2 \leqslant \varepsilon$ donc $G(z) \leqslant \varepsilon$ (car $|z|^2 \geqslant 0$) pour tout $z \in \bar{D}$. Ainsi en faisant tendre ε vers 0, on obtient $G \leqslant 0$ sur $\bar{D}$.
La fonction $-G$ vérifie aussi (a1) pour $f = 0$, (a2) et (a3) donc d'après ce qu'on vient de voir, on a aussi $-G \leqslant 0$ sur $\bar{D}$ i.e. $G \geqslant 0$ sur $\bar{D}$. Donc par double inégalité $G = 0$.

Montrons que si $G : \bar{D} \to \mathbb{C}$ vérifie (a1) pour $f = 0$, (a2) et (a3) alors $G = 0$ i.e. $G = G_f$.
Soit une telle fonction G. Alors les parties réelle et imaginaire $\mathrm{Re}(G) : \bar{D} \to \mathbb{R}$ et $\mathrm{Im}(G) : \bar{D} \to \mathbb{R}$ de G vérifient :
$\star$ l'hypothèse (a2) car $\mathrm{Re}(G)$ et $\mathrm{Im}(G)$ sont continues sur $\bar{D}$ par continuité de G sur $\bar{D}$ (c'est l'hypothèse (a2) pour G).
$\star$ l'hypothèse (a1) pour $f = 0$ car les restrictions de $\mathrm{Re}(G)$ et $\mathrm{Im}(G)$ à T sont respectivement les parties réelles et imaginaires de celle de G à T donc sont nulles car G vérifie (a1) pour $f = 0$.
$\star$ l'hypothèse (a3). En effet, G vérifie (a3) donc la restriction de G à D est de classe $\mathscr{C}^2$ et $\Delta G = 0$ sur D, ainsi les restrictions de $\mathrm{Re}(G)$ et $\mathrm{Im}(G)$ à D qui sont les parties réelles et imaginaires de la restriction de G à D, sont de classe $\mathscr{C}^2$. De plus, comme la dérivation et Re (respectivement Im) commutent, on a $\Delta \mathrm{Re}(G) = \mathrm{Re}(\Delta G) = 0$ et $\Delta \mathrm{Im}(G) = \mathrm{Im}(\Delta G) = 0$.
Ainsi par le premier point de la question, $\mathrm{Re}(G) = \mathrm{Im}(G) = 0$ i.e. $G = 0$.

Traitons enfin le cas général et montrons que $\boxed{\text{si } G \text{ vérifie (a1) pour } f\text{, (a2) et (a3), alors } G = G_f.}$
Soit une telle fonction G. La fonction G_f vérifie (a3) d'après la question 4) vérifie (a2) d'après la question 8) et (a1) par définition. Donc $G - G_f$ vérifie (a1) pour $f - f = 0$, (a2) et (a3), donc $G - G_f = 0$ via le point précédent et donc $G = G_f$.

B - Deux applications

11) • La fonction G est définie par $\widetilde{G}(x; y) = e^x \cos(y)$ pour tout $(x; y) \in \widetilde{\bar{D}}$, donc $\widetilde{G}$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\widetilde{D}$ par composition et produit ce qui prouve que G est $\mathscr{C}^2$ sur D. De plus,

$$\forall (x; y) \in \widetilde{D}, \quad \Delta G(x + iy) = \frac{\partial^2 \widetilde{G}}{\partial x^2}(x; y) + \frac{\partial^2 \widetilde{G}}{\partial y^2}(x; y) = e^x \cos(y) + e^x (-\cos(y)) = 0$$

Ainsi $\boxed{G \text{ vérife (a3).}}$

• Par composition, G vérifie aussi (a2) (continuité sur $\bar{D}$). Et comme G vérifie (a1) pour f la restriction de G à T, la question 10) donne $G = G_f$sur D.
La fonction G est définie par : $\forall z = x + iy \in \bar{D}$ (avec x, y réels)

$$G(z) = e^x \mathrm{Re}(e^{iy}) = \mathrm{Re}(e^z)$$

Posons $f = G_{|T}$.

L'intégrale à calculer est égale à

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it}) \mathrm{Re}(e^{int})\, dt = \frac{c_n + c_{-n}}{2}$$

où les c_k sont les coefficients de Fourier de f.

Or pour tout $x \in]-1;1[$, x est dans D et

$$G(x) = e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Par ailleurs, $G = G_f$ car G vérifie (a1), (a2) et (a3). Donc

$$\forall x \in]-1;1[\subset D, \quad G_f(x) = g_f(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}(c_n + c_{-n})x^n$$

Donc par unicité des coefficients d'une série entière de rayon de convergence non nul (ici, il vaut au moins 1), on obtient : $c_0 = 1$ et $c_n + c_{-n} = 1/n!$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
Donc l'intégrale cherchée est :

$$\boxed{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{\cos t}\cos(\sin t)\cos(nt)\,dt = \frac{c_n + c_{-n}}{2} = \frac{1}{2|n|!} \text{ si } n \neq 0 \text{ et } 1 \text{ sinon}}$$

12) Soit $u : U \to \mathbb{C}$ une application continue sur un ouvert U de $\mathbb{C}$.
• Supposons u de classe $\mathscr{C}^2$ sur U et $\Delta u = 0$ sur U. Soit $a \in U$ et $R > 0$ tels que $\bar{D}(a;R) \subset U$ et notons $G : z \in \bar{D} \mapsto u(a + Rz) \in \mathbb{C}$.
Alors par composition G est C^2 sur D et $\Delta G(z) = R^2 \Delta u(a + Rz) = 0$ pour tout z de D, ainsi G vérifie (a3). Or G vérifie (a2) par composition et (a1) pour $f : z \in T \mapsto u(a + Rz)$ (qui est bien continue sur T par composition). Ainsi d'après 10), on a $G = G_f$ et en particulier via 5) :
$\forall z \in D, G_f(z) = g_f(z) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} u(a + Re^{it})P_z(t)\,dt.$
Or pour tout z de $D(a,R)$, le complexe $(z - a)/R$ est dans D, donc

$$\boxed{u(z) = G\left(\frac{z-a}{R}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(a + Re^{it})P_{\frac{z-a}{R}}(t)\,dt}$$

• Réciproquement, supposons l'égalité précédente vraie pour tout z de $D(a;R)$ et tout $\bar{D}(a;R) \subset U$.
Fixons $(a;R)$ avec $\bar{D}(a;R) \subset U$, l'application $f : z \in T \mapsto u(a+Rz)$ est continue sur T par composition (u est supposée continue sur U), ainsi g_f existe et vérifie via 5):

$$\forall z \in D(a;R), \quad \frac{z-a}{R} \in D, \quad g_f\left(\frac{z-a}{R}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{\pi} f(e^{it})P_{\frac{z-a}{R}}(t)\,dt$$

Ainsi notre hypothèse assure $u(z) = g_f\left(\frac{z-a}{R}\right)$ pour tout $z \in D(a;R)$ et via 4), g_f est $\mathscr{C}^2$ sur D où son laplacien Δg_f est nul, donc par composition u est C^2 et $\Delta u = 0$ sur $D(a;R)$. Ceci étant vrai pour tout $\bar{D}(a;R) \subset U$ et la régularité et le laplacien Δ étant des notions locales, u est C^2 et de laplacien nul sur la réunion W de tous les $D(a;R)$ tels que $\bar{D}(a;R) \subset U$. Comme U est ouvert, pour tout $a \in U$, il existe $R > 0$ t.q. $D(a,R) \subset U$ donc $\bar{D}(a,R/2) \subset U$ ainsi a est dans W et donc $U \subset W$ et comme par définition $W \subset U$, on a $W = U$ et donc bien $\boxed{u \text{ est de classe } \mathscr{C}^2 \text{ sur } U \text{ et } \Delta u = 0 \text{ sur } U.}$

13) • Il est en fait plus simple d'utiliser la question 7 que la question précédente.
Soient $a \in U$ et$R > 0$ tels que $\bar{D}(a,R) \subset U$ (un tel R existe car U est ouvert).
Posons $G_n : z \in \bar{D} \mapsto u_n(a + Rz)$ et $G : z \in \bar{D} \mapsto u_n(a + Rz)$, et notons f_n et f les restrictions de G_n et G à T.
La suite (f_n) converge uniformément vers f sur T et $G_n = G_{f_n}$ donc par la question 7, la suite (G_n) converge uniformément vers G_f sur $\bar{D}$. Or G_n converge uniformément vers G sur $\bar{D}$. Donc $G = G_f$. Donc G est $\mathscr{C}^2$ sur $\bar{D}$ et $\Delta G = 0$ sur D. Ceci valant pour tout $a \in U$, on en déduit que u est de classe $\mathscr{C}^2$ sur U et vérifie $\Delta U = 0$.
• Si on tient à utiliser la question précédente :

Par la partie directe de 12), on a pour tout $(a;R)$ t.q. $\bar{D}(a;R) \subset U$ et pour tout z de $D(a;R)$:

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad u_n(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{\pi} u_n(a+Re^{it})P_{\frac{z-a}{R}}(t)\,dt \quad (*)$$

Or pour tous $t \in]-\pi,\pi[$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_n(a+Re^{it})P_{\frac{z-a}{R}}(t)| \leqslant ||u_n||_{\infty,T(a,R)}P_{\frac{z-a}{R}}(t)$$

car $P_{\frac{z-a}{R}}$ est à valeurs positives et car u_n étant continue est bornée sur le compact $T(a,R)$ (cercle de centre a et rayon R).

Or la suite $(u_{n|T(a,R)})$ converge uniformément vers $u_{|T(a,R)}$ (qui est continue comme limite uniforme d'une suite de fonctions continues) donc $(||u_n||_{\infty,T(a,R)})$ converge vers $||u||_{\infty,T(a,R)}$ donc est bornée, donc il existe $K \in \mathbb{R}^+$ tel que

$$\forall t \in]-\pi,\pi[\quad \forall n \in \mathbb{N},\qquad |u_n(a+Re^{it})P_{\frac{z-a}{R}}(t)| \leqslant KP_{\frac{z-a}{R}}(t) = \varphi(t)$$

φ est intégrable donc par convergence dominée, on obtient :

$$u(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{\pi} u(e^{it})P_{\frac{z-a}{R}}(t)\,dt$$

et ce pour tout z de $D(a;R)$ avec $\bar{D}(a;R) \subset U$. Or u est continue sur U comme limite uniforme (sur U) de la suite de fonctions continues u_n sur U. Ainsi la réciproque de 12) assure que $\boxed{u \text{ est de classe } \mathscr{C}^2 \text{ sur } U \text{ et } \Delta u = 0 \text{ sur } U.}$

C - Propriétés duales

Dans la suite nous noterons $N = ||.||_{\infty,T}$ pour alléger les écritures.

14) La question 6) assure que $\boxed{\varphi_z \text{ vérfie (c2) et (c3).}}$
Dans 7), avec $f_n = 0$ (donc $G_{f_n} = 0$), on a vu $|\varphi(f)| = |G_f(z) - G_{f_n}(z)| \leqslant N(f - f_n) = N(f)$ et ce pour tout f de $\mathscr{C}(T)$ donc $\boxed{\varphi_z \text{ vérfie (c4).}}$
Enfin, l'application qui à $f \in \mathscr{C}(T)$ associe la suite de ses coefficients de Fourier est $\mathbb{C}$-linéaire par linéarité de l'intégrale, donc par produit $f \in \mathscr{C}(T) \mapsto (c_n(f)z^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $f \in \mathscr{C}(T) \mapsto (c_{-n}(f)\bar{z}^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ aussi. L'application qui à une suite associe la somme de la série associée (quand celle-si est convergente) est aussi $\mathbb{C}$-linéaire donc par composition et combinaison linéaire, φ est bien $\mathbb{C}$-linéaire. De plus, elle arrive dans C, donc c'est une forme $\mathbb{C}$-linéaire et comme on a (c4), φ est bien continue et $\boxed{\varphi_z \text{ vérfie (c1).}}$

15) Soit φ vérifiant (c1), (c2) et (c3). Considérons f dans $\mathscr{C}(T)$. D'après **8**, il existe une suite $(f_n)_{n\in N}$ de fonctions de $\mathscr{P}(T)$ qui converge uniformément vers f sur T.
Or pour tout g de $\mathscr{P}(T)$, par définition de $\mathcal{P}(T)$, il existe N et M deux entiers naturels non nuls et des complexes $(\alpha_k)_{k=0\ldots N}$ et $(\beta_k)_{k=1\ldots M}$ avec $g = \displaystyle\sum_{k=0}^{N}\alpha_k p_k + \sum_{k=1}^{M}\alpha_k q_k$ donc la linéarité de φ et φ_z (hypothèse (c1), cf 14) pour φ_z) puis les les hypothèses (c2) et (c3) vérifiées par φ et φ_z, assurent

$$(\varphi - \varphi_z)(g) = \sum_{k=0}^{N}\alpha_k(\varphi-\varphi_z)(p_k) + \sum_{k=1}^{M}\alpha_k(\varphi-\varphi_z)q_k = \sum_{k=0}^{N}\alpha_k(z^k - z^k) + \sum_{k=1}^{M}\alpha_k(\bar{z}^k - \bar{z}^k) = 0$$

Ainsi $\varphi(f_n) = \varphi_z(f_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Or $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur T i.e. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f au sens de la norme N, donc par continuité de φ et φ_z (hypothèse (c1), cf 14) pour φ_z), $\varphi(f_n)$ tend vers $\varphi(f)$ et $\varphi_z(f_n)$ vers $\varphi_z(f)$ quand n tend vers $+\infty$, donc $\varphi(f) = \varphi_z(f)$. Comme f a été choisie quelconque dans $\mathscr{C}(T)$, on a bien $\boxed{\varphi = \varphi_z.}$

16) Montrons que $(N(h))^2 = N(h^2)$.
Comme $N(h)$ majore $\{|h(t)|; t \in T\}$, par croissance de la fonction carrée sur $\mathbb{R}_+$, le réel $(N(h))^2$ majore bien $\{|h(t)|^2; t \in T\} = W$ donc $N(h^2) = \sup W = \sup_T |h|^2 \leqslant (N(h))^2$ car $\sup W$ est le plus petit majorant de W.

De même, $N(h) = N(|h|) = (N(h^2))^{1/2} \leqslant N(h^2)^{1/2}$ par croissance de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}_+$. Donc $N(h)^2 \leqslant N(h^2)$. Ainsi $N(h)^2 = N(h^2)$.

$$\begin{aligned} N(h)^2 &= N(h^2) = N(|h|^2) = N\big((2f - N(f))^2 + \lambda^2\big) \\ &= N\big((2f - N(f))^2\big) + \lambda^2 \text{ car } (2f - N(f)^2 \geqslant 0 \\ &= N\big(2f - N(f)\big)^2 + \lambda^2 \end{aligned}$$

Or $0 \leqslant f \leqslant N(f)$ donc $-N(f) \leqslant 2f - N(f) \leqslant N(f)$ donc $|2f - N(f)| \leqslant N(f)$, et ainsi $N\big(2f - N(f)\big) \leqslant N(f)$.

De plus $2f - N(f) \leqslant N\big(2f - N(f)\big)$ donc $f \leqslant \frac{N(2f - N(f)) + N(f)}{2}$ et ainsi $N(f)$, plus petit majorant de $|f| = f$, vérifie $N(f) \leqslant \frac{N(2f - N(f)) + N(f)}{2}$ d'où $N(f) \leqslant N\big(2f - N(f)\big)$.
Donc $N\big(2f - N(f)\big) = N(f)$.

On a donc : $\boxed{(N(h))^2 = (N(f))^2 + \lambda^2}$.

17) La linéarité de φ (hypothèse (c1)) donne $\varphi(h) = 2\varphi(f) + (-N(f) + i\lambda)\varphi(p_0)$. Comme $\varphi(p_0) = z^0 = 1$ via (c2), on a $\varphi(h) = 2\varphi(f) - N(f) + i\lambda$. Ainsi d'après (c4), on obtient par croissance de la fonction carré sur $\mathbb{R}_+$:

$$|2\varphi(f) - N(f) + i\lambda|^2 = |\varphi(h)|^2 \leqslant N(h)^2 = N(f)^2 + \lambda^2$$

Ainsi pour tout réel λ,

$$\begin{aligned} \Big(2\mathrm{Re}\big(\varphi(f)\big) - N(f)\Big)^2 + \Big(2\mathrm{Im}\big(\varphi(f)\big) + \lambda\Big)^2 &\leqslant N(f))^2 + \lambda^2 \\ \Big(2\mathrm{Re}\big(\varphi(f)\big) - N(f)\Big)^2 + 2\mathrm{Im}\big(\varphi(f)\big)\Big(2\mathrm{Im}\big(\varphi(f)\big) + \lambda\Big) &\leqslant N(f))^2 \end{aligned}$$

Si $\mathrm{Im}\big(\varphi(f)\big) > 0$ (respectivement < 0) alors le membre de gauche tend vers $+\infty$ quand λ tend vers $+\infty$ (respectivement $-\infty$), ce qui est contradictoire. Donc $\boxed{\mathrm{Im}\big(\varphi(f)\big) = 0}$.

On a donc $(2\varphi(f) - N(f))^2 \leqslant N(f)^2$ donc $|2\varphi(f) - N(f)| \leqslant N(f)$.

Ainsi $-N(f) \leqslant 2\varphi(f) - N(f)$ donc $\boxed{\varphi(f) \geqslant 0}$.

18) Soit $f \in \mathscr{C}(T)$ et g, h ses parties réelle et imaginaire. Par $\mathbb{C}$-linéarité de φ,

$$\varphi(f) = \varphi(g) + i\varphi(h) \quad \text{et} \quad \varphi(\bar{f}) = \varphi(g) - i\varphi(h)$$

Or

$$\varphi(g) = \varphi(g + N(g)) - \varphi(N(g)p_0) = \varphi(g + N(g)) - N(g) \in \mathbb{R}$$

car $g + N(g)$ est à valeurs positives, donc $\varphi(g + N(g)) \in \mathbb{R}$ par la question précédente.

De même $\varphi(h) \in \mathbb{R}$.

Ainsi $\boxed{\varphi(\bar{f}) = \overline{\varphi(f)}}$.

En particulier on a pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\varphi(q_n) = \varphi(\bar{p}_n) = \overline{\varphi(p_n)} = \overline{z^n} = \bar{z}^n$.

Donc φ vérifie (c3). On en déduit que $\boxed{\varphi = \varphi_z}$.