Devoir libre 15

Notations

Pour ce problème n désigne un entier naturel non nul.

- Un vecteur de $\mathbb{R}^n$ est noté $x = (x_k)_{1\leqslant k\leqslant n} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.
- Une matrice A de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est notée $A = ((a_{j,k}))_{1\leqslant j,k\leqslant n}$ où $a_{j,k}$ est le coefficient de A situé en ligne j et colonne k.
- L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est muni du produit scalaire canonique défini par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n,\ (x|y) = x^\top . y = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$$

  et $x \mapsto \|x\| = \sqrt{(x|x)}$ est la norme euclidienne associée.
- La sphère unité de $\mathbb{R}^n$ est $\Omega_n = \{x \in \mathbb{R}^n /\ \|x\| = 1\}$.

À toute matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on associe la fonction $q_A\ :\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ q_A(x) = (Ax|x)$$

Objectifs

Dans la **partie I**, on étudie q_A pour $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, puis pour $A \in S_n(\mathbb{R})$ et l'on définit une norme sur $S_n(\mathbb{R})$. La suite du problème est consacrée à une étude des matrices de Hilbert définies par

$$H_n = ((a_{j,k}))_{1\leqslant j,k\leqslant n} \quad \text{où} \quad a_{j,k} = \frac{1}{j+k-1}$$

On étudie en particulier quelques propriétés du déterminant, des valeurs propres.

Partie I - Une norme sur $S_n(\mathbb{R})$

1. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
   a) Enoncer les propriétés de la sphère unité Ω_n ainsi que celles de la fonction q_A qui permettent d'affirmer que q_A est bornée sur Ω_n et qu'elle atteint ses bornes.
   On note $m_A = \min(q_A(\Omega_n))$ et $M_A = \max(q_A(\Omega_n))$.
   b) Démontrer que $\mathbb{R} \cap \mathrm{Sp}(A) \subset [m_A, M_A]$.
   c) Expliciter $\mathrm{Sp}(A)$, m_A et M_A lorsque $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.
   On pourra remarquer que $\Omega_2 = \{(\cos(\theta), \sin(\theta)) /\ \theta \in \mathbb{R}\}$.
2. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que $q_A(x) = 0$ pour tout $x \in \Omega_n$.
   a) Montrer que $q_A(y) = 0$ pour tout $y \in \mathbb{R}^n$.
   b) Si $(y,z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, exprimer $q_A(y+z)$ (qui est nul d'après 2.a) en fonction de $(Ay|z)$ et $(Az|y)$.
   c) En déduire que la matrice A est anti-symétrique (c'est à dire que $A^\top = -A$).
   On pourra étudier l'adjoint de l'endomorphisme a canoniquement associé à A
3. Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$. Montrer que :

$$(\forall x \in \Omega_n,\ q_A(x) = 0) \iff (A = 0)$$

4. Montrer que l'application $N \ : \ S_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall A \in S_n(\mathbb{R}), \ N(A) = \sup_{x \in \Omega_n} |q_A(x)|$$

est une norme

5. **Bornes de q_A sur Ω_n.**
Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$.
   a) Justifier qu'il existe une base orthonormée $(e_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ de $\mathbb{R}^n$ et des réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ vérifiant $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_k \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$ tels que

$$\forall k \in \{1, 2, \ldots, n\}, \ u(e_k) = Ae_k = \lambda_k e_k$$

   On se fixe une telle base $(e_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ et des réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ dans la suite de la question 5)
   b) Préciser $q_A(e_k)$ pour tout $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$.
   c) Soit $x = \sum_{k=1}^n x'_k e_k \in \Omega_n$. Justifier les égalités $\|x\|^2 = \sum_{k=1}^n (x'_k)^2 = 1$ puis exprimer $q_A(x)$ en fonction des valeurs propres λ_k de A et des composantes x'_k de x.
   d) Retrouver le résultat obtenu en 1.a) : la fonction q_A possède un minimum m_A et un maximum M_A sur la sphère unité Ω_n. Expliciter m_A et M_A en fonction des valeurs propres de A.
   e) Montrer que $N(A) = \sup_{x \in \Omega_n} |q_A(x)| = \max_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} |\lambda|$. Établir une inégalité entre $|\det(A)|$ et $(N(A))^n$.
   f) **Exemple** : si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/3 \end{pmatrix}$, calculer $\det(A)$ et $N(A)$.

Dans toute la suite du problème, pour tout entier $n \geqslant 2$, on désigne par H_n la matrice de Hilbert d'ordre n définie par

$$H_n = \left(\left(\frac{1}{j+k-1}\right)\right)_{1 \leqslant j,k \leqslant n} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & \ldots & 1/n \\ 1/2 & 1/3 & \ldots & 1/(n+1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1/n & 1/(n+1) & \ldots & 1/(2n-1) \end{pmatrix}$$

ou encore $H_n = ((a_{j,k}))_{1 \leqslant j,k \leqslant n}$ avec $a_{j,k} = \frac{1}{j+k-1}$.
Pour simplifier, on notera q_n la fonction $q_{H_n} \ : \ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$:

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \ q_n(x) = q_{H_n}(x) = (H_n x | x)$$

Partie II - Sur les valeurs propres de H_n

6. **Une expression de $q_n(x)$.**
Soit $x = (x_k)_{1 \leqslant k \leqslant n} \in \mathbb{R}^n$.
   a) Montrer que

$$q_n(x) = (H_n x | x) = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n \frac{x_k}{j+k-1} \right) x_j = \sum_{1 \leqslant j,k \leqslant n} \frac{x_k x_j}{j+k-1}$$

   b) Développer

$$\left(\sum_{k=1}^n x_k t^{k-1} \right) \left(\sum_{j=1}^n x_j t^{j-1} \right)$$

   où t est une variable réelle.

c) Montrer que

$$q_n(x) = \int_0^1 \left(\sum_{k=1}^{n} x_k t^{k-1} \right)^2 \, dt$$

d) En déduire que $H_n \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. Que peut-on en déduire concernant les valeurs propres de H_n ?

7. **Une majoration de $q_n(x)$.**

a) Soit $P(t) = \sum_{k=0}^{m} a_k t^k$ un polynôme à coefficients complexes. Montrer que

$$\int_{-1}^{1} P(t) \, dt = -i \int_0^{\pi} P(e^{i\theta}) e^{i\theta} \, d\theta$$

On pourra expliciter $\int_{-1}^{1} t^k \, dt$ et $-i \int_0^{\pi} e^{ik\theta} e^{i\theta} \, d\theta$.

b) En gardant les notations introduites en 6) et en notant

$$Q(t) = \sum_{k=1}^{n} x_k t^{k-1}$$

montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ on a

$$0 \leqslant q_n(x) = \int_0^1 Q^2(t) \, dt \leqslant \int_0^{\pi} \left| \sum_{k=1}^{n} x_k e^{i(k-1)\theta} \right|^2 \, d\theta$$

les inégalités étant strictes pour $x \neq 0$.
On pourra utiliser les résultats obtenus en 6) et 7.a).

c) Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \; 0 \leqslant q_n(x) \leqslant \pi \|x\|^2$$

l'inégalité étant stricte pour $x \neq 0$.

8. **Application à $\mathrm{Sp}(H_n)$.**
Pour tout entier $n \geqslant 2$, on note

$$\mu_n = \min(\mathrm{Sp}(H_n)) \quad \text{et} \quad \rho_n = \max(\mathrm{Sp}(H_n))$$

a) Expliciter μ_2 et ρ_2. Montrer que pour tout $n \geqslant 2$, on a :

$$0 < \mu_n < \rho_n < \pi$$

b) Montrer que $q_n(\Omega_n) = [\mu_n, \rho_n]$. *On pourra considérer des vecteurs propres orthogonaux e_1 et e_n tels que $H_n e_1 = \mu_n e_1$ et $H_n e_n = \rho_n e_n$, $\|e_1\| = \|e_n\| = 1$ et le vecteur $x = \sqrt{1-t}e_1 + \sqrt{t}e_n$ où $t \in [0,1]$.*

c) Calculer $(H_n \varepsilon_n | \varepsilon_n)$ où ε_n désigne le vecteur de la base canonique

$$\varepsilon_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

En déduire la limite de μ_n lorsque $n \to +\infty$.

Partie III - Sur le déterminant de H_n

H_n désigne toujours la matrice de Hilbert d'ordre n, pour $n \geqslant 2$.

9. **Une fraction rationnelle.**

   On considère la fraction rationnelle $R_n(x) = \dfrac{\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(x-k)}{\displaystyle\prod_{k=0}^{n}(x+k)}$.

   On admettra qu'il existe des réels $\lambda_{0,n}$, $\lambda_{1,n}$, ..., $\lambda_{n,n}$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1, \ldots, -n\},\ R_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda_{k,n}}{(x+k)}$$

   cette décomposition (en éléments simples) de R_n étant unique.
   Exprimer le coefficient $\lambda_{n,n}$ de $\frac{1}{x+n}$ à l'aide de $(2n)!$ et de $n!$.

10. **Matrice A_n.**
    Pour $n \geqslant 2$, on considère la matrice A_n définie par $A_n = ((\alpha_{j,k}))_{1 \leqslant j,k \leqslant n}$ avec

$$\alpha_{j,k} = \begin{cases} \frac{1}{j+k-1} & \text{pour } 1 \leqslant k \leqslant n-1,\ 1 \leqslant j \leqslant n \\ R_{n-1}(j) & \text{pour } k = n,\ 1 \leqslant j \leqslant n \end{cases}$$

    où les R_p ont été définis plus haut.

    a) Montrer que pour $1 \leqslant i \leqslant n$, on a

$$R_{n-1}(i) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{j-1,n-1} a_{i,j}$$

    puis en déduire que $\det(A_n) = \binom{2(n-1)}{n-1} \det(H_n)$.

    b) Montrer que $\det(A_n) = \frac{\det(H_{n-1})}{(2n-1)\binom{2(n-1)}{n-1}}$. En déduire l'expression de $\det(H_n)$ en fonction de $\det(H_{n-1})$.

    c) Montrer que pour tout $n \geqslant 2$, $\det(H_n) \neq 0$, puis que $\frac{1}{\det(H_n)} \in \mathbb{N}^*$.

11. **Calcul de $\det(H_n)$.**
    En notant pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\Phi_n = \prod_{k=1}^{n} k!$, montrer que

$$\forall n \geqslant 2,\ \det(H_n) = \frac{\Phi_{n-1}^4}{\Phi_{2n-1}}$$