Partie I - Une norme sur $S_n(\mathbb{R})$

1. a) La fonction q_A est continue car polynomiale puisque que $q_A(x) = \sum_{1\leqslant j,k\leqslant n} a_{j,k}x_jx_k$.
L'ensemble Ω_n est la sphère unité. Elle est donc bornée et fermée. Comme $\mathbb{R}^n$ est de dimension finie, Ω_n est compact.
On en déduit que q_A est bornée et atteint ses bornes.

   b) Soit λ une valeur propre réelle de A. Il existe alors x non nul dans $\mathbb{R}^n$ tel que $Ax = \lambda x$. Posons $y = \frac{x}{\|x\|}$; c'est un élément de Ω_n et $q_A(y) = \frac{1}{\|x\|^2}(Ax|x) = \frac{1}{\|x\|^2}(\lambda x|x) = \lambda$. Ainsi $\lambda \in q_A(\Omega_n) = [m_A, M_A]$ et on a montré que
$$\mathbb{R} \cap \mathrm{Sp}(A) \subset [m_A, M_A]$$

   c) La matrice A étant triangulaire, on lit les valeurs propres sur la diagonale :
$$\mathrm{Sp}(A) = \{2\}$$
Par ailleurs $q(x_1, x_2) = 2x_1^2 - x_1x_2 + 2x_2^2$ et
$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ q(\cos(\theta), \sin(\theta)) = 2 - \cos(\theta)\sin(\theta) = 2 - \frac{1}{2}\sin(2\theta)$$
Comme $\sin(2\theta)$ décrit $[-1, 1]$ quand θ parcourt $\mathbb{R}$, on en déduit que
$$q_A(\Omega_2) = \left[\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right]$$

2. a) Si $y \neq 0$, on peut poser $x = \frac{y}{\|y\|}$ et remarquer que puisque $x \in\ \Omega_n$, $q_A(y) = \|y\|^2 q_A(x) = 0$. Comme $q_A(y) = 0$ de manière directe on a montré que
$$\forall y \in \mathbb{R}^n,\ q_A(y) = 0$$

   b) Par bilinéarité du produit scalaire, $q_A(y+z) = q_A(y)+q_A(z)+(Ay|z)+(Az|y)$. Avec la question précédente, on a donc
$$0 = q_A(y + z) = (Ay|z) + (Az|y)$$

   c) Si on note a l'endomorphisme canoniquement associé à A. D'après la question précédente, pour tout y, z dans $\mathbb{R}^n$
$$(a(y)|z) = -(a(z)|y) = (y| - a(z))$$
On en déduit que $a^* = -a$. Comme la matrice (dans la base canonique) de a est $A^\top$, on obtient que $A^\top = -A$.

3. Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$.
Si $A = (0)$ il est immédiat que $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ q_A(x) = 0$ (et c'est a fortiori vrai sur Ω_n).
Réciproquement, si q_A est nulle sur Ω_n, on vient de voir que A est antisymétrique. Comme elle est aussi symétrique, elle est nulle ($-A^\top = A = A^\top$ et donc $A = 0$).

4. On a quatre propriétés à vérifier.
   - N est bien définie ($N(A)$ est même un maximum) et est positive (borne supérieure de quantités qui le sont).

- Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$ telle que $N(A) = 0$. On a alors $\forall x \in \Omega_n,\ 0 \leqslant |q_A(x)| \leqslant N(A) = 0$ et q_A est nulle sur Ω_n. D'après la question précédente, $A = 0$. Ceci nous donne l'axiome de séparation.
- Soit $A, B \in S_n(\mathbb{R})$;

$$\forall x \in\ \Omega_n,\ |q_{A+B}(x)| = |q_A(x) + q_B(x)| \leqslant |q_A(x)| + |q_B(x)| \leqslant N(A) + N(B)$$

  en passant à la borne supérieure, on trouve $N(A+B) \leqslant N(A)+N(B)$ ce qui donne l'inégalité triangulaire.
- Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in\ \mathbb{R}$. Pour tout $x \in \Omega_n$,

$$|q_{\lambda A}(x)| = |(\lambda Ax|x)| = |\lambda||q_A(x)|$$

  On en déduit que

$$N(\lambda A) = \sup_{x\in\Omega_n} |q_{\lambda A}(x)| = \sup_{x\in\Omega_n} |\lambda||q_A(x)| = |\lambda| \sup_{x\in\Omega_n} |q_A(x)| = |\lambda|N(A)$$

Remarque : on a besoin de la symétrie des matrices uniquement pour l'axiome de séparation.

5. a) La matrice A est une matrice symétrique réelle donc a son endomorphisme canoniquement associé est autoadjoint. D'après le théorème spectral il existe une base orthonormée $(e_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ de $\mathbb{R}^n$ telle que la matrice de a dans cette base soit diagonale. Il existe donc des réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tels que

$$\forall k \in \{1, 2, \ldots, n\},\ u(e_k) = Ae_k = \lambda_k e_k$$

   Quitte à changer l'ordre des vecteurs de la base, on peut de plus supposer que $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_k \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$

   b) Le calcul est immédiat

$$\forall k \in \{1, 2, \ldots, n\},\ q_A(e_k) = (Ae_k|e_k) = \lambda_k\|e_k\|^2 = \lambda_k$$

   c) Les formules proposées correspondent à celles de calcul en base orthonormée. On les retrouve en utilisant la bilinéarité du produit scalaire :

$$\forall x \in \Omega_n,\ 1 = \|x\|^2 = \sum_{1\leqslant j,k\leqslant n} x'_j x'_k (e_j|e_k) = \sum_{k=1}^{n} (x'_k)^2$$

   On a aussi

$$q_A(x) = (Ax|x) = \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x'_k e_k | \sum_{k=1}^{n} x'_k e_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k (x'_k)^2$$

   d) En gardant les notations de la question précédente, on a donc

$$\lambda_1 = \lambda_1 \sum_{i=1}^{n} \lambda_1 (x'_k)^2 \leqslant q_A(x) \leqslant \lambda_1 \sum_{i=1}^{n} \lambda_n (x'_k)^2 = \lambda_n$$

   Le minorant est atteint pour $x = e_1 \in \Omega_n$ et le majorant pour $x = e_n \in \Omega_n$. Ce sont donc des minimum et maximum :

$$m_A = \min \mathrm{Sp}(A) = \lambda_1 \ \text{ et } \ M_A = \max \mathrm{Sp}(A) = \lambda_n$$

e) On garde toujours les mêmes notations. On a

$$|q_A(x)| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|(x'_k)^2 \leqslant \max_{\lambda\in\mathrm{Sp}(A)} |\lambda| \sum_{k=1}^{n}(x'_k)^2 = \max_{\lambda\in\mathrm{Sp}(A)} |\lambda|$$

Le majorant est atteint pour e_k tel que $|\lambda_k| = \max_{\lambda\in\mathrm{Sp}(A)} |\lambda|$ (c'est donc e_1 ou e_n) et c'est donc un maximum :

$$N(A) = \max_{\lambda\in\mathrm{Sp}(A)} |\lambda|$$

Enfin A est semblable à $\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ et son déterminant est égal au produit des λ_k. Ainsi,

$$|\det(A)| = \prod_{k=1}^{n} |\lambda_k| \leqslant \left(\max_{\lambda\in\mathrm{Sp}(A)} |\lambda|\right)^n = (N(A))^n$$

f) Un calcul immédiat donne

$$\det(A) = \frac{1}{12}$$

Le polynôme caractéristique de A est $X^2 - \frac{4}{3}X + \frac{1}{12}$ ($X^2 - \mathrm{Tr}(A)X + \det(A)$). Les valeurs propres de A, qui sont les racines de ce polynôme, sont donc

$$\lambda_1 = \frac{2}{3} - \frac{\sqrt{13}}{6} \quad \text{et} \quad \lambda_2 = \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{13}}{6}$$

La question précédente donne donc

$$N(A) = \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{13}}{6}$$

Partie II - Sur les valeurs propres de H_n

6. a) En notant $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ la base canonique qui est orthonormée,

$$q_n(x) = \left(\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{j,k}x_k\right)e_j \middle| \sum_{j=1}^{n} x_j e_j\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{j,k}x_k\right)x_j = \sum_{1\leqslant j,k\leqslant n} a_{j,k}x_k x_j$$

b) Le développement contient n^2 termes (nombre de choix pour un terme dans la première somme et un autre dans la seconde) :

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k t^{k-1}\right)\left(\sum_{j=1}^{n} x_j t^{j-1}\right) = \sum_{1\leqslant k,j,\leqslant n} x_k x_j t^{k+j-2}$$

c) On remarque que $\left(\sum_{k=1}^{n} x_k t^{k-1}\right)\left(\sum_{j=1}^{n} x_j t^{j-1}\right) = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k t^{k-1}\right)^2$. En intégrant l'égalité de la question précédente, on a donc

$$\int_0^1 \left(\sum_{k=1}^{n} x_k t^{k-1}\right)^2 dt = \sum_{1\leqslant k,j\leqslant n} \int_0^1 x_j x_k \int_0^{j+k-2} dt$$

Comme $\int_0^1 x_j x_k \int_0^{j+k-2} dt = \frac{1}{j+k-1}$, la question 1 permet d'affirmer que

$$\int_0^1 \left(\sum_{k=1}^{n} x_k t^{k-1}\right)^2 dt = \sum_{1\leqslant j,k\leqslant n} \frac{x_k x_j}{j+k-1} = q_n(x)$$

d) L'intégrale d'une fonction positive sur $[0,1]$ est positive. On en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $q_n(x) \geqslant 0$.
De plus si la fonction est en plus continue, il ne peut y avoir nullité de l'intégrale que s'il y a nullité de la fonction sur $[0,1]$. Or, $x \mapsto \left(\sum_{k=1}^n x_k t^{k-1}\right)^2$ est une fonction continue et positive et n'est nulle que si les x_k le sont (une fonction polynomiale n'admet une infinité de racines que si elle est nulle). Ces résultats couplés à la question précédente montrent que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},\ q_n(x) > 0$$

On obtient que $H_n \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.
D'après le cours, $\mathrm{Sp}(H_n) \subset \mathbb{R}_+^*$.

7. a) On remarque que

$$\forall k \in \mathbb{N},\ -i\int_0^\pi (e^{i\theta})^k e^{i\theta}\ d\theta = \frac{-i}{(k+1)i}\left[e^{(k+1)i\theta}\right]_0^\pi = \frac{1-(-1)^{k+1}}{k+1} = \int_{-1}^1 t^k\ dt$$

Le passage à l'intégrale étant linéaire, des combinaisons linéaires de ces relations montrent que

$$\forall P \in \mathbb{C}[X],\ -i\int_0^\pi P(e^{i\theta})e^{i\theta}\ d\theta = \int_{-1}^1 P(t)\ dt$$

b) D'après la question 6)

$$0 \leqslant q_n(x) = \int_0^1 Q^2(t)\ dt$$

Par ailleurs, la question précédente donne

$$\int_0^1 Q^2(t)\ dt \leqslant \int_{-1}^1 Q^2(t)\ dt = \left|\int_{-1}^1 Q^2(t)\ dt\right| = \left|-i\int_0^\pi Q^2(e^{i\theta})e^{i\theta}\ d\theta\right| \leqslant \int_0^\pi |Q^2(e^{i\theta})|\ d\theta$$

En combinant les deux résultats, on a donc

$$0 \leqslant q_n(x) = \int_0^1 Q^2(t)\ dt \leqslant \int_0^\pi \left|\sum_{k=1}^n x_k e^{i(k-1)\theta}\right|^2\ d\theta$$

S'il y a égalité (à droite, on connaît déjà le cas d'égalité à gauche), il doit y avoir égalité dans toutes les étapes intermédiaires et on doit donc avoir $\int_{-1}^0 Q^2(t)\ dt = 0$. La fonction Q^2 étant positive et continue, elle doit être nulle sur $[-1,0]$. On en déduit que Q est le polynôme nul (infinité de racines) et ses coefficients sont nuls. C'est-à-dire que $x = 0$. Ainsi

$$\forall x \neq 0,\ 0 < q_n(x) < \int_0^\pi \left|\sum_{k=1}^n x_k e^{i(k-1)\theta}\right|^2\ d\theta$$

c) Explicitons le carré du module ci-dessus en écrivant que $|z|^2 = z\overline{z}$:

$$\left|\sum_{k=1}^n x_k e^{i(k-1)\theta}\right|^2 = \sum_{1\leqslant j,k\leqslant n} x_j x_k e^{i(k-j)\theta}$$

On en déduit par linéarité du passage à l'intégrale que

$$\int_0^\pi \left| \sum_{k=1}^n x_k e^{i(k-1)\theta} \right|^2 \, d\theta = \sum_{1 \leqslant j,k \leqslant n} x_j x_k \int_0^\pi e^{i(k-j)\theta} \, d\theta$$

Les intégrales du membre de droite se calculent en distinguant selon que j est ou non égal à k. On obtient

$$\int_0^\pi \left| \sum_{k=1}^n x_k e^{i(k-1)\theta} \right|^2 \, d\theta = \pi \|x\|^2 + \frac{1}{i} \sum_{k \neq j} x_k x_j \frac{(-1)^{k-j} - 1}{k-j}$$

Dans la somme du membre de droite, on associe les termes deux à deux : un terme (k, j) avec le terme (j, k) et les termes correspondants sont opposés. Ce regroupement montre que la somme est nulle. On a donc

$$\forall x \neq 0,\ 0 < q_n(x) < \int_0^\pi \left| \sum_{k=1}^n x_k e^{i(k-1)\theta} \right|^2 \, d\theta = \pi \|x\|^2$$

8. a) La question 5.f) indique que

$$\mu_2 = \frac{2}{3} - \frac{\sqrt{13}}{6} \ \text{ et } \ \rho_2 = \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{13}}{6}$$

La question 5.d) donne

$$\mu_n = m_{H_n} \ \text{ et } \ \rho_n = M_{H_n}$$

La question précédente montre que q_n prend sur Ω_n des valeurs dans $]0, \pi[$ (0 n'étant pas dans Ω_n). On a donc

$$0 < \mu_n \leqslant \rho_n < \pi$$

Par ailleurs, H_n n'étant pas scalaire et diagonalisable, elle admet au moins deux valeurs propres et $\mu_n < \rho_n$. Ainsi

$$0 < \mu_n < \rho_n < \pi$$

b) Avec la question 5.d) on a

$$q_n(\Omega_n) \subset [\mu_n, \rho_n]$$

Il nous reste à voir que tout élément de l'intervalle $[\mu_n, \rho_n]$ admet un antécédent par q_n dans Ω_n. On sait qu'il existe des vecteurs e_1 et e_n non nuls tels que $H_n e_1 = \mu_n e_1$ et $H_n e_n = \rho_n e_n$ (car μ_n et ρ_n sont des valeurs propres). Les sous-espaces propres de H_n étant orthogonaux (théorème spectral), e_1 et e_n le sont (les valeurs propres μ_n et ρ_n sont différentes). Enfin, quitte à les normer (ce qui ne leur fait pas perdre le caractère propre), on peut supposer $\|e_1\| = \|e_n\| = 1$. On pose alors $x_t = \sqrt{1-t} e_1 + \sqrt{t}$ pour tout $t \in [0, 1]$, en remarquant que $x_t \in \Omega_n$. On a d'après la question 5.c)

$$q_n(x_t) = \mu_n(1-t) + \rho_n t$$

et quand t varie dans $[0, 1]$, $q_n(x_t)$ varie dans $[\mu_n, \rho_n]$. Toutes les valeurs de cet intervalle ont donc un antécédent par q_n dans Ω_n et

$$q_n(\Omega_n) = [\mu_n, \rho_n]$$

c) Avec la formule de la question 6.a) on a

$$q_n(\varepsilon_n) = (H_n\varepsilon_n|\varepsilon_n) = \frac{1}{2n-1}$$

On en déduit (on rappelle que $\mu_n = m_{H_n}$) que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 < \mu_n \leqslant \frac{1}{2n-1}$$

et par théorème d'encadrement

$$\lim_{n\to+\infty} \mu_n = 0$$

Partie III - Sur le déterminant de H_n

9. Pour obtenir $\lambda_{k,n}$, on multiplie l'égalité admise par $x+k$ et on donne à x la valeur $-k$. En particulier, on obtient

$$\lambda_{n,n} = \frac{\prod_{k=1}^{n}(-n-k)}{\prod_{k=0}^{n-1}(-n+k)} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \binom{2n}{n}$$

10. a) En utilisant la formule admise et un changement d'indice ($j = k+1$) on trouve

$$\begin{aligned} R_{n-1}(i) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda_{k,n-1}}{i+k} \\ &= \sum_{j=1}^{n} \frac{\lambda_{j-1,n-1}}{i+j-1} \\ &= \sum_{j=1}^{n} \lambda_{j-1,n-1} a_{i,j} \end{aligned}$$

Si on note $C_1, \ldots, C_n$ les colonnes de H_n, alors les colonnes de A_n sont $C_1, \ldots, C_{n-1}$ pour les $n-1$ premières. D'après la formule vue ci-dessus, la dernière est $\sum_{j=1}^{n} \lambda_{j-1,n-1} C_j$. Ainsi, par caractère multilinéaire alterné du déterminant

$$\det(A_n) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{j-1,n-1} \det(C_1, \ldots, C_{n-1}, C_j) = \lambda_{n-1,n-1} \det(C_1, \ldots, C_n) = \lambda_{n-1,n-1} \det(H_n)$$

ou encore, avec la question 9)

$$\det(A_n) = \frac{(2(n-1))!}{((n-1)!)^2} \det(H_n) = \binom{2(n-1)}{n-1} \det(H_n)$$

b) Comme $R_{n-1}(i)$ est nul pour $i = 1, \ldots, n-1$, la dernière colonne de A_n vaut $(0, \ldots, R_{n-1}(n))$. Un développement par rapport à cette dernière colonne donne alors

$$\det(A_n) = \det(H_{n-1}) R_{n-1}(n) = \frac{((n-1)!)^2}{(2n-1)!} \det(H_{n-1}) = \frac{\det(H_{n-1})}{(2n-1)\binom{2(n-1)}{n-1}}$$

On combine les deux formules pour en déduire que

$$\det(H_n) = \frac{1}{(2n-1)\binom{2(n-1)}{n-1}^2} \det(H_{n-1})$$

c) On voit que $\det(H_1) = 1 > 0$. Un récurrence immédiate en utilisant la formule ci-dessus donne que pour $n \geqslant 1$, $\det(H_n) > 0$.

On montre par récurrence que $\forall n \geqslant 1,\ \frac{1}{\det(H_n)} \in \mathbb{N}^*$.

- Initialisation : $\det(H_1) = 1$ et le résultat est vrai pour $n = 1$.
- Hérédité : soit $n \geqslant 2$ tel que la propriété soit vraie au rang $n-1$. En utilisant la question précédente,

$$\frac{1}{\det(H_n)} = (2n-1)\binom{2(n-1)}{n-1}^2 \frac{1}{\det(H_{n-1})} \in \mathbb{N}^*$$

11. Une récurrence s'impose là encore.

- Initialisation : $\det(H_2) = \frac{1}{12}$ et comme $\Phi_1 = 1$ et $\Phi_2 = 12$, le résultat est vrai pour $n = 2$.
- Hérédité : soit $n \geqslant 2$ tel que la propriété soit vraie au rang $n-1$. La relation de la question 10.b) donne alors

$$\det(H_n) = \frac{\Phi_{n-2}^4}{\Phi_{2n-3}} \frac{(n-1)!^4}{(2n-2)!(2n-1)!} = \frac{\Phi_{n-1}^4}{\Phi_{2n-1}}$$

ce qui prouve le résultat au rang n.