## Exercice

1. $\chi_A = (X-1)(X-3)+1 = X^2-4X+4 = \boxed{(X-2)^2}$.
   Par le théorème de Cayley-Hamilton, $\boxed{0 = \chi_A(A) = (A-2I_2)^2}$
   Ainsi $B = A - 2I_2$ est nilpotente.
   Soit $t \in \mathbb{R}$. Comme $tA = 2tI_2 + tB$ et comme $2tI_2$ et $tB$ commutent, on a :
   $$\exp(tA) = \exp(2tI_2)\exp(tB) = e^{2t} I_2 \exp(tB) = e^{2t}\exp(tB)$$

2. Posant $X : t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, le système différentiel de l'énoncé s'écrit $X' = AX$ et la condition initiale s'écrit $X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. L'unique solution de ce problème de Cauchyest donné par :
   $$\forall t \in \mathbb{R},\ X(t) = \exp(tA)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = e^{2t}\exp(tB)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = e^{2t}(I_2 + tB)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$
   car pour tout $n \geqslant 2$, $\frac{t^nB^n}{n!} = 0$ puisque $B^2 = 0$.
   Or $I_2 + tB = (1-2t)I_2 + tA = \begin{pmatrix} 1-t & -t \\ t & 1+t \end{pmatrix}$.
   Ainsi la solution recherchée est donnée par
   $$\boxed{\forall t \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} x(t) = e^{2t}((1-t)1 + (-t)2) = e^{2t}(1-3t) \\ y(t) = e^{2t}(t.1 + (1+t)2) = e^{2t}(2+3t) \end{cases}}$$

---

## Première partie

1. L'équation (1) est une équation différentielle linéaire scalaire, du second ordre, homogène, résolue en $x''$ et à coefficients continus. Par le théorème de Cauchy, $\mathscr{E}$ est un $\boxed{\mathbb{C}\text{-espace vectoriel de dimension } 2}$.

2. Les fonctions $x_1$ et $x_2$ étant de classe $\mathscr{C}^2$, leurs dérivées $x_1'$ et $x_2'$ sont de classe $\mathscr{C}^1$. On en déduit que la fonction $W$ est également de classe $\mathscr{C}^1$. Dérivons cette fonction, on obtient
   $$W' = x_1'x_2' + x_1x_2'' - x_1''x_2 - x_1'x_2' = 0$$
   ce qui montre que $\boxed{W \text{ est constante}}$ sur l'intervalle $\mathbb{R}$.

3. a) Remarquons que l'opérateur de translation $\mathscr{T}$ et l'opérateur de dérivation commutent (car $t \mapsto t+T$ a une dérivée constante égale à 1) et que, notamment, pour toute fonction deux fois dérivable $f$, on a : $\mathscr{T}(f)'' = \mathscr{T}(f'')$
   Soit maintenant $f$ une solution de l'équation (1). Notons $g = \mathscr{T}(f)$. Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$ :
   $$\begin{aligned} g''(t) + \big(\lambda - q(t)\big)\,g(t) &= f''(t+T) + \big(\lambda - q(t)\big)\,f(t+T) \\ &= f''(t+T) + \big(\lambda - q(t+T)\big)\,f(t+T) = 0 \end{aligned}$$
   Ainsi, $\boxed{\text{si } f \in \mathscr{E}, \text{ alors } \mathscr{T}(f) \in \mathscr{E}}$.

b) L'application $\tau$ est clairement linéaire et injective, donc $\boxed{\text{c'est un automorphisme}}$ de l'espace de dimension finie $\mathscr{E}$. On pouvait aussi constater que l'application $\varphi$

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{E} & \to & \mathscr{E} \\ g & \mapsto & f = g \circ (t \mapsto t - T) \end{array}$$

était bien définie (c'est-à-dire bien à valeurs dans $\mathscr{E}$) et vérifiait $\tau \circ \varphi = \varphi \circ \tau = \mathrm{id}_{\mathscr{E}}$.

4. a) Le théorème de Cauchy linéaire (dont les hypothèses ont été rappelées dans la première question) garantit $\boxed{\text{l'existence et l'unicité de } x_1 \text{ et } x_2}$.

b) Le théorème de Cauchy linéaire affirme également que l'application $\psi$ :

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{E} & \to & \mathbb{C}^2 \\ x & \mapsto & (x(0), x'(0)) \end{array}$$

est un isomorphisme.
Comme $((1,0),(0,1))$ est une base de $\mathbb{C}^2$, la famille $(x_1, x_2) = (\psi^{-1}(1,0), \psi^{-1}(0,1))$ est donc une $\boxed{\text{base de } \mathscr{E}}$.

5. a) Notons $M = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}$ la matrice de l'endomorphisme $\tau$ dans la base $(x_1, x_2)$.
L'image par $\tau$ de la fonction $x_1$ est $\tau(x_1) = \alpha x_1 + \beta x_2$. Évaluant cette expression en $t = 0$, on trouve

$$\alpha = \tau(x_1)(0) = x_1(T).$$

Évaluons maintenant la dérivée en $t = 0$ :

$$\tau(x_1)'(0) = \alpha\, x_1'(0) + \beta\, x_2'(0) = \beta.$$

Puisque l'opérateur $\tau$ et la dérivation commutent, on a également $\tau(x_1)'(0) = x_1'(T)$ et donc $\beta = x_1'(T)$.
De même avec $x_2$, ce qui donne

$$M = \boxed{\begin{pmatrix} x_1(T) & x_2(T) \\ x_1'(T) & x_2'(T) \end{pmatrix}}.$$

b) Le déterminant de cette matrice est égal au wronskien de $(x_1, x_2)$ évalué en $T$, et ce wronskien est constant par la question 2) :

$$\det M = x_1(T)\, x_2'(T) - x_2(T)\, x_1'(T) = W(T) = W(0) = x_1(0)\, x_2'(0) - x_2(0)\, x_1'(0) = \boxed{1}.$$

c) $\delta = \frac{1}{2}\mathrm{tr}(M) = \boxed{\dfrac{1}{2}\big(x_1(T) + x_2'(T)\big)}$

6. Les valeurs propres de $\tau$ sont les racines du polynôme caractéristique de $\tau$, qui est

$$P = \det(XI_2 - M) = \begin{vmatrix} X - x_1(T) & -x_2(T) \\ -x_1'(T) & X - x_2'(T) \end{vmatrix} = \boxed{X^2 - 2\delta\, X + 1}$$

7. a) On suppose $\delta$ réel et $|\delta| \neq 1$. Le discriminant du polynôme $P$ vaut $4(\delta^2 - 1)$. Il est donc non nul et, par conséquent, $P$ admet deux racines distinctes dans $\mathbb{C}$. Puisque $\tau$ admet deux valeurs propres distinctes et que $\mathscr{E}$ est de dimension 2, $\tau$ est $\boxed{\text{diagonalisable}}$ et, par conséquent :

$\boxed{\mathscr{E} \text{ est la somme des (deux) sous-espaces propres de } \tau.}$

b) On suppose $|\delta| < 1$. Le discriminant de $P$ est $4(\delta^2 - 1)$ qui est strictement négatif, donc $P$ admet deux racines imaginaires conjuguées

$$\rho = \delta + \mathrm{i}\sqrt{1 - \delta^2} \quad \text{et} \quad \bar{\rho} = \delta - \mathrm{i}\sqrt{1 - \delta^2}.$$

Le produit des racines étant égal au déterminant de $M$, à savoir 1, on peut conclure $|\rho|^2 = |\bar{\rho}|^2 = 1$.

Notons $(u, v)$ une base de $\mathscr{E}$ formée de vecteurs propres de $\tau$ et montrons que $u$ et $v$ sont stables.

En premier lieu, remarquons que la restriction de $u$ à $[0, T]$ est bornée (comme toute fonction continue sur un segment). Notons $A = \sup\limits_{t \in [0,T]} \big|u(t)\big|$.

Pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$|u(t + T)| = |\rho u(t)| = |u(t)|$$

donc $|u|$ est $T$-périodique.

La fonction $u$ étant bornée sur $[0, T]$, elle est donc bornée sur $\mathbb{R}^+$ (on prouve par récurrence sur $n$ que $|u| \leqslant A$ sur $[0, n]$ pour tout naturel $n$), donc c'est une solution stable. Idem pour $v$.

Donc $\boxed{\text{toutes les solutions de (1) sont stables}}$ car sont des combinaisons linéaires de $u$ et $v$.

Montrons maintenant que $u$ n'est pas fortement stable. En tant que fonction propre, $u$ est non nulle et donc $A > 0$. On sait que ce maximum (sur $[0, T]$) est atteint ; notons $t_0$ un point vérifiant $|u(t_0)| = A > 0$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $|u(t_0 + nT)| = A$

Ainsi, $u$ ne tend pas vers 0 en l'infini car sinon la suite $(|u(t_0 + nT)|)_{n \geqslant 0}$ convergerait vers 0 et on aurait $A = 0$ par unicité de la limite, ce qui est faux.

$\boxed{\text{Donc } u \text{ n'est pas fortement stable. Pour la même raison, } v \text{ n'est pas fortement stable.}}$

c) On suppose $|\delta| > 1$. Le discriminant du polynôme $P$ est donc strictement positif et $P$ possède deux racines réelles distinctes $\rho$ et $\rho'$, de produit $\rho\rho' = 1$.

Supposons (absurde) que $|\rho| \geqslant 1$ et que $|\rho'| \geqslant 1$. Alors $|\rho| = \frac{1}{|\rho'|} \leqslant 1$ donc $\rho = \pm 1$. Idem pour $\rho'$. De plus, $\rho \neq \rho'$, donc $\rho\rho' = -1$, de qui est contradictoire.

$\boxed{\text{L'une de ces racines est donc de module strictement inférieur à 1}}$. L'autre racine est alors de module strictement supérieur à 1. On supposera par exemple $|\rho| < 1 < |\rho'|$.

Notons $u$ une fonction propre pour la valeur propre $\rho$. Notons encore $A = \sup\limits_{t \in [0,T]} \big|u(t)\big|$. Soit $t \in \mathbb{R}^+$. Posons $n = \lfloor t/T \rfloor$, de sorte que $t - nT \in [0, T]$. On peut alors écrire

$$u(t) = \tau^n(u)(t - nT) = \rho^n\, u(t - nT)$$

et, en passant au module :

$$|u(t)| = |\rho|^n\,|u(t-nT)| \leqslant |\rho|^n\,A.$$

On a donc $\boxed{\lim\limits_{t\to+\infty} u(t) = 0}$.

Notons $v$ une fonction propre pour la valeur propre $\rho'$. Posons $N = \sup\limits_{t\in[0,T]} \big|v(t)\big|$.

Cette borne supérieure est atteinte en au moins un point ; on peut donc choisir $t_1 \in [0,T]$ tel que $|v(t_1)| = N > 0$. Alors, pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $v(t_1+nT) = \rho'^n\,v(t_1)$ donc

$$\big|v(t_1+nT)\big| = |\rho'|^n\,N.$$

Notamment, $v$ n'est pas bornée, donc n'est pas stable (et encore moins fortement stable).

Par ailleurs, la famille $(u,v)$ forme une base de $\mathscr{E}$. Toute solution de l'équation (1) s'écrit sous la forme $\alpha u+\beta v$ ; si $\beta\neq 0$, cette solution ne saurait être bornée et encore moins tendre vers 0 ; si au contraire $\beta = 0$, la solution est bien sûr fortement stable.

$\boxed{\text{Une solution est fortement stable si et seulement si elle est multiple de } u.}$

Toute solution stable est également multiple de $u$, et tous les multiples de $u$ sont fortement stables, donc : $\boxed{\text{toute solution stable est également fortement stable.}}$

## Deuxième partie

8. a) L'équation (1) s'écrit

$$x'' + \lambda x = 0 \tag{2}$$

Son équation caractéristique est $X^2+\lambda = 0$.

Distinguons trois cas selon le signe de $\lambda$.

**Cas** $\lambda > 0$ : Les racines de l'équation caractéristiques sont $\pm i\sqrt{\lambda}$. Les solutions de l'équation (2) sont de la forme

$$x : t \mapsto \alpha\exp\big(i\sqrt{\lambda}\,t\big) + \beta\exp\big(-i\sqrt{\lambda}\,t\big)$$

**Cas** $\lambda = 0$ : L'équation admet 0 comme racine double. Les solutions sont de la forme

$$x : t\mapsto \alpha t+\beta$$

**Cas** $\lambda < 0$ : Les racines de l'équation caractéristiques sont $\pm\sqrt{-\lambda}$. Les solutions de l'équation (2) sont de la forme

$$x : t\mapsto \alpha\ \exp\big(\sqrt{-\lambda}\,t\big) + \beta\ \exp\big(-\sqrt{-\lambda}\,t\big)$$

b) Dans chacun des trois cas de la question précédente, on cherche à déterminer $x_1$ et $x_2$ définies par les conditions initiales : $x_1(0) = 1$, $x_1'(0) = 0$, $x_2(0) = 0$ et $x_2'(0) = 1$.

**Cas** $\lambda > 0$ : On sait que les solutions sont de la forme $x : t\mapsto \alpha\exp\big(i\sqrt{\lambda}\,t\big)+\beta\exp\big(-i\sqrt{\lambda}\,t\big)$.

En particulier, pour $x_1$, $\alpha,\beta$ vérifient le système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \alpha+\beta &=& 1\\ i\sqrt{\lambda}\alpha - i\sqrt{\lambda}\beta &=& 0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl}\alpha &=& \frac{1}{2}\\ \beta &=& \frac{1}{2}\end{array}\right.$$

On en déduit que

$$x_1 : t \mapsto \frac{1}{2}\Big(\exp\big(i\sqrt{\lambda}\,t\big) + \exp\big(-i\sqrt{\lambda}\,t\big)\Big) = \cos(\sqrt{\lambda}t)$$

De même, pour $x_2$, $\alpha, \beta$ vérifient le système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \alpha+\beta & = & 0 \\ i\sqrt{\lambda}\alpha - i\sqrt{\lambda}\beta & = & 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} \alpha & = & \frac{i}{2i\sqrt{\lambda}} \\ \beta & = & -\frac{i}{2i\sqrt{\lambda}} \end{array}\right.$$

On en déduit que

$$x_2 : t \mapsto \frac{1}{2i\sqrt{\lambda}}\Big(\exp\big(i\sqrt{\lambda}\,t\big) - \exp\big(-i\sqrt{\lambda}\,t\big)\Big) = \frac{\sin(\sqrt{\lambda}t)}{\sqrt{\lambda}}$$

De ce fait, $\boxed{\delta_0(\lambda) = \frac{1}{2}(x_1(\pi) + x_2'(\pi)) = \cos(\sqrt{\lambda}\pi)}$.

**Cas** $\lambda = 0$ **:** Les solutions sont de la forme $x : t \mapsto \alpha t + \beta$ On en déduit que

$$x_1 : t \mapsto 1 \quad \text{et} \quad x_2 : t \mapsto t.$$

De ce fait, $\boxed{\delta_0(0) = \frac{1}{2}(x_1(\pi) + x_2'(\pi)) = 1}$.

**Cas** $\lambda < 0$ **:** Les solutions de l'équation (2) sont de la forme $x : t \mapsto \alpha\ \exp\big(\sqrt{-\lambda}\,t\big) + \beta\ \exp\big(-\sqrt{-\lambda}\,t\big)$.

En particulier, pour $x_1$, $\alpha, \beta$ vérifient le système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \alpha+\beta & = & 1 \\ \sqrt{-\lambda}\alpha - \sqrt{-\lambda}\beta & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} \alpha & = & \frac{1}{2} \\ \beta & = & \frac{1}{2} \end{array}\right.$$

On en déduit que

$$x_1 : t \mapsto \frac{1}{2}\Big(\exp\big(\sqrt{-\lambda}\,t\big) + \exp\big(-\sqrt{-\lambda}\,t\big)\Big) = \mathrm{ch}(\sqrt{-\lambda}t)$$

De même, pour $x_2$, $\alpha, \beta$ vérifient le système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \alpha+\beta & = & 0 \\ \sqrt{-\lambda}\alpha - \sqrt{-\lambda}\beta & = & 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} \alpha & = & \frac{1}{2\sqrt{-\lambda}} \\ \beta & = & -\frac{1}{2\sqrt{-\lambda}} \end{array}\right.$$

On en déduit que

$$x_2 : t \mapsto \frac{1}{2\sqrt{-\lambda}}\Big(\exp\big(\sqrt{-\lambda}\,t\big) - \exp\big(-\sqrt{-\lambda}\,t\big)\Big) = \frac{\mathrm{sh}(\sqrt{-\lambda}t)}{\sqrt{-\lambda}}.$$

De ce fait, $\boxed{\delta_0(0) = \frac{1}{2}(x_1(\pi) + x_2'(\pi)) = \mathrm{ch}(\sqrt{-\lambda}\pi)}$.

c) Pour $\lambda > 0$, $\delta_0(\lambda) = \cos(\sqrt{\lambda}\pi) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\,(\sqrt{\lambda}\pi)^{2n}}{(2n)\,!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\,\pi^{2n}\,\lambda^n}{(2n)\,!}$. Cette formule est aussi vraie pour $\lambda = 0$.

Pour $\lambda < 0$, $\delta_0(\lambda) = \mathrm{ch}(\sqrt{-\lambda}\pi) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{-\lambda}\pi)^{2n}}{(2n)\,!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\,\pi^{2n}\,\lambda^n}{(2n)\,!}$.

On en déduit que $\delta_0$ est bien développable en série entière sur $\mathbb{R}$.

d) On suppose que $\lambda = n^2$ où $n$ est un entier naturel. En utilisant les formules précédentes, on obtient successivement

$$x_1(\pi) = \cos n\pi = (-1)^n \qquad x_1'(\pi) = -n\sin n\pi = 0$$

$$x_2(\pi) = \frac{1}{n}\sin n\pi = 0 \qquad x_2'(\pi) = \cos n\pi = (-1)^n$$

et donc, en utilisant la question 5.a : $M = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix} = (-1)^n\, I_2$

9. a) La fonction $|q|$ est $\pi$-périodique. Comme elle est continue, elle admet un maximum noté $Q$ sur le **segment** $[0,\pi]$ (qui est atteint). Maintenant, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on peut écrire $x = \alpha + k\pi$ avec $\alpha \in [0,\pi[$. De ce fait, $|q(x)| = |q(\alpha)| \leqslant Q$.

$\boxed{\text{La fonction } |q| \text{ admet bien un maximum sur } \mathbb{R}.}$

b) Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ :

$$(H_n) : \forall t \in \mathbb{R}, |u_n(t)| \leqslant \frac{Q^n|t|^n}{\omega^n n!} \text{ et } |v_n(t)| \leqslant \frac{Q^n|t|^n}{\omega^{n+1} n!}$$

— Pour $n = 0$. Soit $t \in \mathbb{R}$, $|u_0(t)| = |\cos(t)| \leqslant 1$ et $|v_0(t)| = \left|\frac{\sin(\omega t)}{\omega}\right| \leqslant \frac{1}{\omega}$.

— Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose $(H_n)$. Pour tout $t \geqslant 0$,

$$\begin{aligned} |u_{n+1}(t)| &= \left|\int_0^t \frac{\sin(\omega(t-s))}{\omega} q(s)u_n(s)ds\right| \\ &\leqslant \int_0^t \left|\frac{\sin(\omega(t-s))}{\omega} q(s)u_n(s)\right| ds \\ &\leqslant \frac{Q}{\omega}\int_0^t |u_n(s)|ds \\ &\leqslant \frac{Q}{\omega}\int_0^t \frac{Q^n s^n}{\omega^n n!}ds = \frac{Q^{n+1}}{\omega^{n+1}(n+1)!}\left[s^{n+1}\right]_0^t = \frac{Q^{n+1}|t|^{n+1}}{\omega^{n+1}(n+1)!} \end{aligned}$$

De même, pour tout $t \leqslant 0$,

$$\begin{aligned} |u_{n+1}(t)| &= \left|\int_0^t \frac{\sin(\omega(t-s))}{\omega} q(s)u_n(s)ds\right| \\ &\leqslant \int_t^0 \left|\frac{\sin(\omega(t-s))}{\omega} q(s)u_n(s)\right| ds \\ &\leqslant \frac{Q}{\omega}\int_t^0 |u_n(s)|ds \\ &\leqslant \frac{Q}{\omega}\int_t^0 \frac{Q^n(-s)^n}{\omega^n n!}ds = -\frac{Q^{n+1}}{\omega^{n+1}(n+1)!}\left[(-s)^{n+1}\right]_t^0 = -\frac{Q^{n+1}(-t)^{n+1}}{\omega^{n+1}(n+1)!} \end{aligned}$$

On en déduit, là encore, que $|u_{n+1}(t)| \leqslant \dfrac{Q^{n+1}|t|^{n+1}}{\omega^{n+1}(n+1)!}$.

Les calculs pour $v_n$ sont similaires. On a donc bien démontré $(H_{n+1})$.

10. a) On sait que $\boxed{\sin(a-b) = \sin a\cos b - \sin b\cos a.}$

b) Montrons par récurrence que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n$ et $v_n$ sont de classe $\mathscr{C}^1$.

— Pour $n = 0$. $u_0 : t \mapsto \cos(t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et $v_0 : t \mapsto \frac{\sin(\omega t)}{\omega}$ aussi.

— Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $u_n$ et $v_n$ sont de classe $\mathscr{C}^1$. Pour $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} u_{n+1}(t) &= \int_0^t \frac{\sin(\omega(t-s))}{\omega} q(s)u_n(s)ds \\ &= \int_0^t \frac{\sin(\omega t)\cos(\omega s) - \cos(\omega t)\sin(\omega s)}{\omega} q(s)u_n(s)ds \\ &= \sin(\omega t)\int_0^t \frac{\cos(\omega s)}{\omega} q(s)u_n(s)ds - \cos(\omega t)\int_0^t \frac{\sin(\omega s)}{\omega} q(s)u_n(s)ds \end{aligned}$$

Les fonctions $s \mapsto \dfrac{\cos(\omega s)}{\omega} q(s)u_n(s)$ et $s \mapsto \dfrac{\sin(\omega s)}{\omega} q(s)u_n(s)$ étant continues, d'après le théorème fondamental de l'analyse et les théorèmes généraux de dérivabilité, la fonction $u_{n+1}$ est de classe $\mathscr{C}^1$.

On en déduit par récurrence que pour tout entier $n$, $u_n$ et $v_n$ sont de classe $\mathscr{C}^1$.
De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} u'_{n+1}(t) &= \omega\cos(\omega t)\int_0^t \frac{\cos(\omega s)}{\omega} q(s)u_n(s)ds + \frac{\cos(\omega t)\sin(\omega t)}{\omega} q(t)u_n(t) \\ &\quad + \omega\sin(\omega t)\int_0^t \frac{\sin(\omega s)}{\omega} q(s)u_n(s)ds - \frac{\cos(\omega t)\sin(\omega t)}{\omega} q(t)u_n(t) \\ &= \int_0^t \left(\cos(\omega t)\cos(\omega s) + \sin(\omega t)\sin(\omega s)\right) q(s)u_n(s)ds \\ &= \int_0^t \cos(\omega(t-s)) q(s)u_n(s)ds \end{aligned}$$

On montre de même la formule pour $v'_n$.

c) Soit $n \geqslant 1$ et $t \geqslant 0$,

$$\begin{aligned} |u'_n(t)| &\leqslant \int_0^t \left|\cos(\omega(t-s)) q(s)u_{n-1}(s)\right| ds \\ &\leqslant Q\int_0^t \frac{Q^{n-1}s^{n-1}}{\omega^{n-1}(n-1)!}ds = \frac{Q^n}{\omega^{n-1}n!}\left[s^n\right]_0^t = \frac{Q^n|t|^n}{\omega^{n-1}n!} \end{aligned}$$

De même, pour $t < 0$,

$$\begin{aligned} |u'_n(t)| &\leqslant \int_t^0 \left|\cos(\omega(t-s)) q(s)u_{n-1}(s)\right| ds \\ &\leqslant Q\int_t^0 \frac{Q^{n-1}(-s)^{n-1}}{\omega^{n-1}(n-1)!}ds = -\frac{Q^n}{\omega^{n-1}n!}\left[(-s)^n\right]_t^0 = \frac{Q^n|t|^n}{\omega^{n-1}n!} \end{aligned}$$

Là encore, le calcul est similaire pour $v'_n$.

$$\forall t \in \mathbb{R}, |u'_n(t)| \leqslant \frac{Q^n|t|^n}{\omega^{n-1}n!} \text{ et } |v'_n(t)| \leqslant \frac{Q^n|t|^n}{\omega^n n!}.$$

11. Fixons-nous un réel $A$ positif. Alors pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$||u'_n||_{\infty,[-A,A]} = \sup_{t\in[-A,A]} \left|u'_n(t)\right| \leqslant \frac{Q^n A^n}{\omega^{n-1}\, n!} \quad et \quad ||v'_n||_{\infty,[-A,A]} = \sup_{t\in[-A,A]} \left|v'_n(t)\right| \leqslant \frac{Q^n A^n}{\omega^n\, n!},$$

donc les séries de fonctions $\sum u_n'$ et $\sum v_n'$ convergent normalement, et donc uniformément, sur $[-A, A]$. Puisque les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent simplement , on en déduit que les fonctions $y$ et $z$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[-A, A]$ (et leur dérivée peut être calculée en dérivant terme à terme les séries qui les définissent). Ceci étant vrai pour toute valeur du réel $A$, on en déduit que

$\boxed{\text{Les fonctions } y \text{ et } z \text{ sont de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}.}$

12. Soit $t \in \mathbb{R}$. On travaille sur le segment $I$ qui vaut $[0, t]$ ou $[t, 0]$.
Pour tout entier, $n$,
$$\left\| s \mapsto \frac{\sin(\omega(t-s))}{\omega} q(s) u_n(s) \right\|_{\infty, I} \leqslant \frac{Q^{n+1}|t|^n}{\omega^{n+1} n!}.$$
De ce fait, la série qui définie l'intégrale $\displaystyle\int_0^t \frac{\sin(\omega(t-s))}{\omega} q(s) y(s) ds$ converge normalement et donc uniformément sur $I$. On peut donc intervertir l'intégrale et la somme. De ce fait,
$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{\sin(\omega(t-s))}{\omega} q(s) y(s) ds &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^t \frac{\sin(\omega(t-s))}{\omega} q(s) u_n(s) ds \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1}(t) \\ &= y(t) - u_0(t) = y(t) - \cos(\omega t) \end{aligned}$$
De même, la série qui permet de définir, $\displaystyle\int_0^t \frac{\sin(\omega(t-s))}{\omega} q(s) z(s) ds$ converge uniformément et donc
$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{\sin(\omega(t-s))}{\omega} q(s) z(s) ds &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^t \frac{\sin(\omega(t-s))}{\omega} q(s) v_n(s) ds \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} v_{n+1}(t) \\ &= z(t) - v_0(t) = y(t) - \frac{\sin(\omega t)}{\omega} \end{aligned}$$

13. On utilise la méthode de la question 10.b, on a que pour tout réel $t$,
$$y(t) = \cos(\omega t) + \sin(\omega t) \int_0^t \frac{\cos(\omega s)}{\omega} q(s) y(s) ds - \cos(\omega t) \int_0^t \frac{\sin(\omega s)}{\omega} q(s) y(s) ds$$
En dérivant, on obtient alors, avec la même simplification qu'en 10.b
$$y'(t) = -\omega \sin(\omega t) + \omega \cos(\omega t) \int_0^t \frac{\cos(\omega s)}{\omega} q(s) y(s) ds + \omega \sin(\omega t) \int_0^t \frac{\sin(\omega s)}{\omega} q(s) y(s) ds$$
On peut alors dériver de nouveau (on voit donc que $y$ est de classe $\mathscr{C}^2$ et
$$\begin{aligned} y''(t) &= \omega^2 \cos(\omega t) - \omega^2 \sin(\omega t) \int_0^t \frac{\cos(\omega s)}{\omega} q(s) y(s) ds + \cos^2(\omega t) q(t) y(t) \\ &\quad + \omega^2 \cos(\omega t) \int_0^t \frac{\sin(\omega s)}{\omega} q(s) y(s) ds + \sin^2(\omega t) q(t) y(t) \\ &= \lambda \left( \cos(\omega t) + \int_0^t \frac{\sin(\omega(t-s))}{\omega} q(s) y(s) ds \right) + q(t) y(t) \end{aligned}$$

On en déduit que $y'' - \lambda y + qy = 0$. La fonction $y$ vérifie bien l'équation (1) pour $\lambda = \omega^2$. Le calcul pour $z$ est similaire.

14. a) On a $y(0) = \cos(0) = 1$ et $y'(0) = -\omega \sin(0) = 0$. De même, $z(0) = \dfrac{\sin(0)}{\omega} = 0$ et $z'(0) = \cos(0) = 1$.

    De ce fait, $y$ et $z$ sont les fonctions $x_1$ et $x_2$ de la partie I d'après l'unicité des solutions du problème de Cauchy (question 4).

    On en déduit que $\delta_q(\lambda) = \dfrac{1}{2}\left(y(\pi) + z'(\pi)\right)$

    b) D'après la question 11, on peut calculer $z'$ en dérivant terme à terme, on en déduit que

$$\delta_q(\lambda) = \frac{1}{2}\left(y(\pi) + z'(\pi)\right) = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(\pi) + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n'(\pi)\right).$$

Maintenant, $u_0(\pi) = v_0'(\pi) = \cos(\omega\pi) = \delta_0(\omega)$. De ce fait,

$$\delta_q(\lambda) - \delta_0(\lambda) = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(\pi) + \sum_{n=1}^{+\infty} v_n'(\pi)\right).$$

En utilisant alors les question 9.b et 10.c,

$$|\delta_q(\lambda) - \delta_0(\lambda)| \leqslant \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{Q^n\,\pi^n}{\omega^n\,n!} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{Q^n\,\pi^n}{\omega^n\,n!}\right) = \exp\left(\frac{\pi Q}{\omega}\right) - 1.$$

15. a) On a

$$\begin{aligned}
u_1(\pi) + v_1'(\pi) &= \int_0^\pi \frac{\sin(\omega(\pi - s))}{\omega} q(s)\cos(\omega s)ds + \int_0^\pi \cos(\omega(\pi - s))q(s)\frac{\sin(\omega s)}{\omega}ds \\
&= \frac{1}{\omega}\int_0^\pi \left(\sin(\omega(\pi - s))\cos(\omega s) + \cos(\omega(\pi - s))\sin(\omega s)\right) q(s)ds \\
&= \frac{\sin(\omega\pi)}{\omega}\int_0^\pi q(s)ds = 0
\end{aligned}$$

    b) En reprenant les calculs de la questions 14.b), on a alors,

$$\delta_q(\lambda) - \delta_0(\lambda) = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(\pi) + \sum_{n=1}^{+\infty} v_n'(\pi)\right) = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=2}^{+\infty} u_n(\pi) + \sum_{n=2}^{+\infty} v_n'(\pi)\right)$$

et donc

$$|\delta_q(\lambda) - \delta_0(\lambda)| \leqslant \frac{1}{2}\left(\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{Q^n\,\pi^n}{\omega^n\,n!} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{Q^n\,\pi^n}{\omega^n\,n!}\right) = \exp\left(\frac{\pi Q}{\omega}\right) - 1 - \frac{\pi Q}{\omega}.$$

Alors, pour $\lambda \to +\infty$, $\dfrac{\pi Q}{\omega}$ tend vers 0 et donc

$$\exp\left(\frac{\pi Q}{\omega}\right) - 1 - \frac{\pi Q}{\omega} \sim \frac{1}{2}\left(\frac{\pi Q}{\omega}\right)^2 = O\left(\frac{1}{\omega^2}\right) = O\left(\frac{1}{\lambda}\right).$$

Finalement, $\boxed{\delta_q(\lambda) = \delta_0(\lambda) + O\left(\dfrac{1}{\lambda}\right).}$