Exercice

On considère le système différentiel de fonctions inconnues x, y et de variable $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x' &= x - y \\ y' &= x + 3y \end{cases}$$

1. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Calculer le polynôme caractéristique de la matrice A et en déduire que la matrice $B = A - 2I_2$ est nilpotente.
   Justifier que pour tout réel t, $\exp(tA) = e^{2t}\exp(tB)$ puis donner l'expression de la matrice $\exp(tA)$.
2. En utilisant ce qui précède, ou à l'aide de toute autre méthode, trouver la solution du système différentiel vérifiant $\begin{cases} x(0) &= 1 \\ y(0) &= 2 \end{cases}$

Problème

Résonance paramétrique

Ce problème propose une première approche mathématique de la résonance paramétrique, phénomène physique que l'on rencontre aussi bien dans les recherches sur le mouvement de la lune que dans la manière de faire démarrer une escarpolette, ou dans l'étude des matériaux semi-conducteurs.

Soit q une fonction complexe de la variable réelle t, continue et périodique de période $T > 0$,

$$\forall t \in \mathbb{R}, q(t+T) = q(t).$$

Soit λ un nombre réel. On considère l'équation différentielle du second ordre

$$x'' + (\lambda - q(t))x = 0 \tag{1}$$

où x est une fonction complexe, de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, de la variable réelle t.

Première partie

1. Soit $\mathscr{E}$ l'ensemble des solutions (complexes) de l'équation (1). Justifier que $\mathscr{E}$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et donner sa dimension.
2. Soient x_1 et x_2 deux solutions de (1). Soit $W = x_1x_2' - x_1'x_2$. Montrer que W est constante (que $W(t)$ est indépendant de t). *On pourra calculer la dérivée de W.*
3. Soit $\mathscr{T}$ l'opérateur de translation par T qui, à une fonction complexe f, associe la fonction $\mathscr{T}(f)$ telle que

   $$\forall t \in \mathbb{R}, \mathscr{T}(f)(t) = f(t+T).$$

   a) Montrer que, si $f \in \mathscr{E}$, alors $\mathscr{T}(f) \in \mathscr{E}$.

   b) On désigne par τ la restriction de $\mathscr{T}$ à $\mathscr{E}$. Est-ce un isomorphisme de $\mathscr{E}$ sur $\mathscr{E}$?
4. a) Justifier qu'il existe une unique solution x_1 de (1) telle que

   $$x_1(0) = 1,\ x_1'(0) = 0,$$

   et une unique solution x_2 de (1) telle que :

   $$x_2(0) = 0,\ x_2'(0) = 1.$$

b) Montrer que x_1 et x_2 forment une base de $\mathscr{E}$.

5. On désigne par M la matrice de l'endomorphisme τ de $\mathscr{E}$ dans la base (x_1, x_2).

   a) Justifier que $M = \begin{pmatrix} x_1(T) & x_2(T) \\ x_1'(T) & x_2'(T) \end{pmatrix}$.

   b) Évaluer $\det M$.

   On pose $\delta = \dfrac{1}{2}\mathrm{tr} M$.

   c) Évaluer δ en fonction de $x_i(T)$, $x_i'(T)$ $(i = 1, 2)$.

6. Montrer que les valeurs propres de l'endomorphisme τ de $\mathscr{E}$ sont les racines du trinôme $P(\rho) = \rho^2 - 2\delta\rho + 1$.

Soit $x \in \mathscr{E}$. On dit que x est *stable* si $|x|$ est bornée sur $\mathbb{R}_+$. On dit que x est *fortement stable* si $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = 0$.

7. On suppose $|\delta| \neq 1$.

   a) Montrer que $\mathscr{E}$ est somme directe des sous-espaces propres de τ.

   b) On suppose que $|\delta| < 1$. Montrer que les deux racines de P sont des complexes conjugués de module 1. En déduire que toutes les solutions de (1) sont stables. Les fonctions propres de τ sont-elles fortement stables dans ce cas ?

   c) On suppose que $|\delta| > 1$. Montrer que P a deux racines réelles dont l'une est de valeur absolue strictement inférieure à 1. En déduire qu'il existe une solution non nulle de (1) fortement stable. Est-elle unique ? Existe-t-il dans ce cas des solutions stables mais non fortement stables ?

Deuxième partie

Dans cette partie, on fixe $T = \pi$. On suppose de plus que q est à valeurs réelles. Pour indiquer la dépendance par rapport au paramètre λ et au choix de la fonction q, on note $\delta_q(\lambda)$ la quantité δ définie à la question 5).

8. **Dans cette question uniquement**, on choisit q identiquement nulle, $q = 0$.

   a) Résoudre l'équation (1) (donner les solutions complexes). On séparera les cas $\lambda > 0, \lambda = 0$ et $\lambda < 0$.

   b) Dans chacun des trois cas de la question précédente, donner x_1 et x_2 comme définis à la question 4.a) (on doit trouver des solutions réelles). Calculer alors $\delta_0(\lambda)$.

   c) Calculer le développement en série entière de $\lambda \mapsto \delta_0(\lambda)$ sur $\mathbb{R}$.

   d) Déterminer la matrice M (de la question 5)) lorsque $\lambda = n^2$, $n \in \mathbb{N}$.

On va maintenant montrer que $\delta_q(\lambda)$ est proche de $\delta_0(\lambda)$ lorsque λ tend vers $+\infty$. On note Q le maximum sur $\mathbb{R}$ de la fonction $|q|$. Soit $\lambda > 0$ fixé, on pose $\omega = \sqrt{\lambda}$.

On pose alors $u_0 : t \in \mathbb{R} \mapsto \cos(\omega t)$, $v_0 : t \in \mathbb{R} \mapsto \dfrac{\sin(\omega t)}{\omega}$ et pour tout $n \geqslant 1$:

$$u_n : t \in \mathbb{R} \mapsto \int_0^t \frac{\sin(\omega(t-s))}{\omega} q(s) u_{n-1}(s) ds, \qquad v_n : t \in \mathbb{R} \mapsto \int_0^t \frac{\sin(\omega(t-s))}{\omega} q(s) v_{n-1}(s) ds$$

9. a) Justifier l'existence de Q.

   b) Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, |u_n(t)| \leqslant \frac{Q^n |t|^n}{\omega^n n!} \text{ et } |v_n(t)| \leqslant \frac{Q^n |t|^n}{\omega^{n+1} n!}.$$

10. a) Rappeler la formule $\sin(a-b)$.

    b) **En déduire** que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n et v_n sont de classe $\mathscr{C}^1$. On montrera également que pour tout $n \geqslant 1$ et tout $t \in \mathbb{R}$,
$$u_n'(t) = \int_0^t \cos(\omega(t-s))q(s)u_{n-1}(s)ds, \qquad v_n'(t) = \int_0^t \cos(\omega(t-s))q(s)v_{n-1}(s)ds.$$
On notera qu'aucune formule du cours ne permet de dériver directement l'expression intégrale définissant u_n et v_n.

    c) Montrer que pour tout $n\geqslant 1$:
$$\forall t \in \mathbb{R}, |u_n'(t)| \leqslant \frac{Q^n|t|^n}{\omega^{n-1}n!} \text{ et } |v_n'(t)| \leqslant \frac{Q^n|t|^n}{\omega^n n!}.$$

On pose
$$y : t \in \mathbb{R} \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) \quad \text{et} \quad z : t \in \mathbb{R} \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} v_n(t).$$

11. Montrer que l'on définit ainsi des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ de la variable t.

12. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$,
$$y(t) = \cos(\omega t) + \int_0^t \frac{\sin(\omega(t-s))}{\omega} q(s)y(s)ds,$$
$$z(t) = \frac{\sin(\omega t)}{\omega} + \int_0^t \frac{\sin(\omega(t-s))}{\omega} q(s)z(s)ds.$$

13. Montrer que y et z sont solutions de (1) pour $\lambda = \omega^2$.

14. a) Calculer $y(0), y'(0), z(0)$ et $z'(0)$ et en déduire que
$$\delta_q(\lambda) = \frac{1}{2}(y(\pi) + z'(\pi)).$$

    b) Montrer que
$$|\delta_q(\lambda) - \delta_0(\lambda)| \leqslant \exp\left(\frac{\pi Q}{\sqrt{\lambda}}\right) - 1.$$
On utilisera les développements en série qui définissent les fonctions y et z.

15. Dans cette question, on suppose de plus que $\int_0^\pi q(t)dt = 0$.

    a) Montrer que
$$u_1(\pi) + v_1'(\pi) = 0.$$

    b) En reprenant les calculs de la questions 14.b), montrer que, pour $\lambda \to +\infty$,
$$\delta_q(\lambda) = \delta_0(\lambda) + O\left(\frac{1}{\lambda}\right).$$