Exercice I

Soit $a < b$ et $c < d$. Soit f une application continue sur $[a,b]\times[c,d]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. On veut démontrer le théorème de Fubini qui affirme que

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(u,t)dt\right) du = \int_c^d \left(\int_a^b f(u,t)du\right) dt$$

Pour tout $(x,t)\in[a,b]\times[c,d]$, on pose : $\varphi(x,t) = \displaystyle\int_a^x f(u,t)du$.

1. Soit $x\in[a,b]$.
   Pour tout $t\in[c,d]$, l'application $f(.,t)$ est continue par morceaux car continue sur $[a,x]$ comme composée des applications continues f et $u\mapsto(u,t)$ (affine, et $\mathbb{R}^2$ est de dimension finie).
   Pour tout $u\in[a,x]$, l'application $f(u,.)$ est continue sur $[c,d]$ (même argument).
   La fonction f étant continue sur $[a,b]\times[c,d]$ qui est compact comme produit de deux compacts. Elle est donc bornée.
   Pour tout $(u,t)\in[a,x]\times[c,d]$, $|f(u,t)|\leqslant\|f\|_\infty$.
   La fonction constante (donc continue) $u\mapsto\|f\|_\infty$ est intégrable sur le segment $[a,x]$.
   Ainsi, par le théorème de continuité des intégrales à paramètre,
   $\boxed{\text{la fonction } t\mapsto\varphi(x,t)=\int_a^x f(u,t)du \text{ est définie est continue sur } [c,d].}$

On pose alors, pour tout $x\in[a,b]$: $\psi(x) = \displaystyle\int_c^d \varphi(x,t)dt$.

2. Pour tout $t\in[c,d]$, l'application $\varphi(.,t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$ par le théorème fondamental de l'analyse et car $f(.,t)$ est continue. De plus

   $$\forall (x,t)\in[a,b]\times[c,d] \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t) = f(x,t)$$

   Soit $x\in[a,b]$, la fonction $\varphi(x,.)$ est continue sur $[c,d]$ par la question précédente, donc est intégrable sur ce segment. De plus la fonction $\frac{\partial\varphi}{\partial x}(.,t) = f(.,t)$ est continue donc continue par morceaux sur $[c,d]$.
   Enfin pour tout $(x,t)\in[a,b]\times[c,d]$,

   $$\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t)\right| = |f(x,t)| \leqslant \|f\|_\infty$$

   et la fonction constante $t\mapsto\|f\|_\infty$ est intégrable sur le segment $[c,d]$.
   Donc par le théorème de dérivation des intégrales à paramètre, $\boxed{\psi \text{ est de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } [a,b]}$ et

   $$\forall x\in[a,b] \qquad \boxed{\psi'(x) = \int_c^d \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t)dt = \int_c^d f(x,t)dt}$$

3. Par le théorème fondamental de l'analyse, pour tout $x\in[a,b]$,

   $$\psi(x) = \psi(a) + \int_a^x \psi'(u)du$$

   c'est-à-dire

   $$\boxed{\int_a^x \left(\int_c^d f(u,t)dt\right) du = \int_c^d \left(\int_a^x f(u,t)du\right) dt}$$

4. Appliquant le résultat précédent à $\boxed{x = b}$ $\boxed{\text{on en déduit le théorème de Fubini}}$.

Exercice II

Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$. On considère les fonctions u, v de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = \big(u(x,y), v(x,y)\big)$$

1. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. La matrice jacobienne de f en (x,y) est

$$\boxed{J(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}}$$

2. On suppose que pour tout (x,y) de $\mathbb{R}^2$, $J(x,y)$ est une matrice de rotation. On note

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} C(x,y) & -S(x,y) \\ S(x,y) & C(x,y) \end{pmatrix}$$

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
Comme $J(x,y)$ est orthogonale, la norme euclidienne (canonique) de sa première colonne est égale à 1 donc

$$C(x,y)^2 + S(x,y)^2 = 1$$

Comme f est de classe $\mathscr{C}^2$, ses composantes (dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$) sont de classe $\mathscr{C}^2$ donc C et S sont de classe $\mathscr{C}^1$.
Comme $C^2 + S^2$ est constante, ses dérivées partielles premières sont nulles donc

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad \boxed{2C(c,y)\frac{\partial C}{\partial x}(x,y) + 2S(c,y)\frac{\partial S}{\partial x}(x,y) = 0}$$

et

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad \boxed{2C(c,y)\frac{\partial C}{\partial y}(x,y) + 2S(c,y)\frac{\partial S}{\partial y}(x,y) = 0}$$

De plus comme u et de classe $\mathscr{C}^2$, on a d'après le théorème de Schwarz, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}(x,y)$$

c'est-à-dire

$$\boxed{\frac{\partial(-S)}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial C}{\partial y}(x,y)}$$

De même

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}(x,y)$$

c'est-à-dire

$$\boxed{\frac{\partial C}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial S}{\partial y}(x,y)}$$

On a donc en tout point $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{pmatrix} C & S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C & S \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial C}{\partial x} \\ \frac{\partial S}{\partial x} \\ \frac{\partial C}{\partial y} \\ \frac{\partial S}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Par développement selon la dernière ligne, puis utilisation de la règle de Sarrus pour les déterminant d'ordre 3 ainsi obtenus, le déterminant de ce système est égal à :

$$+\begin{vmatrix} S & 0 & 0 \\ 0 & C & S \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} C & S & 0 \\ 0 & 0 & C \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -S^2 - C^2 = -1 \neq 0$$

donc c'est un système cramérien homogène dont la seule solution est nulle.
Ainsi C et S ont des dérivées partielles nulles. Comme C et S sont de classe $\mathscr{C}^1$ et comme $\mathbb{R}^2$ est un ouvert connexe par arcs, $\boxed{C \text{ et } S \text{ sont constantes sur } \mathbb{R}^2}$.

3. Notons C l'unique valeur prise par la fonction C, idem pour S.
Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $u(x,.)$ a pour dérivée $-S$ donc

$$\forall y \in \mathbb{R} \quad u(x,y) = u(x,0) - Sy$$

Or la fonction $u(.,0)$ a pour dérivée C donc

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad u(x,0) = u(0,0) + Cx$$

Ainsi

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad \boxed{u(x,y) = u(0,0) + Cx - Sy}$$

De même

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad \boxed{v(x,y) = v(0,0) + Sx + Cy}$$

(variante : la fonction $(x,y) \mapsto u(x,y) - (Cx - Sy)$ a des dérivées partielles nulles ; étant de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ qui est ouvert connexe par arcs, elle est constante. Idem *mut. mut.* pour v.)
Ainsi, notant θ un réel tel que $C = \cos\theta$ et $S = \sin\theta$,
f est $\boxed{\text{la composée de la translation de vecteur } f(0,0) \text{ et de la rotation vectorielle d'angle } \theta}$.
Si θ n'est pas congru à 0 modulo 2π, c'est une $\boxed{\text{rotation affine}}$. Dans le cas contraire, c'est une $\boxed{\text{translation}}$.

Remarque : réciproquement, si f est une rotation affine ou une translation, alors elle est de classe $\mathscr{C}^2$ et sa différentielle est constante et sa valeur en tout point est la partie linéaire de f, c'est-à-dire une rotation vectorielle, donc J est constante et son unique valeur est dans $SO(2)$.