Devoir libre 17

Exercice I

Soit $a < b$ et $c < d$. Soit f une application continue sur $[a, b] \times [c, d]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. On veut démontrer le théorème de Fubini qui affirme que

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(u,t)dt \right) du = \int_c^d \left(\int_a^b f(u,t)du \right) dt$$

Pour tout $(x, t) \in [a, b] \times [c, d]$, on pose : $\varphi(x, t) = \displaystyle\int_a^x f(u, t)du$.

1. Montrer que pour tout $x \in [a, b]$, l'application $t \mapsto \varphi(x, t)$ est continue sur $[c, d]$.

On pose alors, pour tout $x \in [a, b]$: $\psi(x) = \displaystyle\int_c^d \varphi(x, t)dt$.

2. Montrer que ψ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a, b]$; préciser ψ'.
3. En déduire :
$$\forall x \in [a,b], \quad \int_a^x \left(\int_c^d f(u,t)dt \right) du = \int_c^d \left(\int_a^x f(u,t)du \right) dt$$
4. Conclure

Exercice II

Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$. On considère les fonctions u, v de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = \big(u(x,y), v(x,y)\big)$$

1. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, écrire la matrice jacobienne $J(x, y)$ de f.
2. On suppose que pour tout (x, y) de $\mathbb{R}^2$, $J(x, y)$ est une matrice de rotation. On note
$$J(x,y) = \begin{pmatrix} C(x,y) & -S(x,y) \\ S(x,y) & C(x,y) \end{pmatrix}$$
Montrer que S et C sont constantes.
On pourra, pour $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, établir un système de quatre équations vérifié par les dérivées partielles $\frac{\partial C}{\partial x}(x_0, y_0)$, $\frac{\partial C}{\partial y}(x_0, y_0)$, $\frac{\partial S}{\partial x}(x_0, y_0)$ et $\frac{\partial S}{\partial x}(x_0, y_0)$.
3. Déterminer u et v.