Problème 1 (CCINP PSI 2018)

1. Par croissance de l'espérance pour les variables positives,

$$E(|X|) \leqslant E(1_\Omega) = 1 < +\infty$$

donc $\boxed{X \text{ est d'espérance finie}}$.

On suppose désormais que X est *centrée*.

2. Soit Y une variable aléatoire **positive**sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
Soit $a > 0$.

$$\forall \omega \in \Omega \quad Y(\omega) \geqslant a 1_{Y \geqslant a}(\omega)$$

donc par croissance et homogénéité de l'espérance pour les variables aléatoires positives

$$E(Y) \geqslant a E(1_{Y \geqslant a}) = a P(Y \geqslant a)$$

et ainsi

$$\boxed{P(Y \geqslant a) \leqslant \frac{E(Y)}{a}}$$

(y compris si Y est d'espérance infinie).

3. Comme $|X|$ est une variable aléatoire positive,

$$\boxed{P\big(|X| \geqslant \alpha\big) \leqslant \frac{E\big(|X|\big)}{\alpha}}$$

4. Soient $t > 0$, $\varepsilon > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$.
Comme $x \mapsto e^{tnx}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, on a

$$\forall \omega \in \Omega \quad S_n(\omega) \geqslant \epsilon \Leftrightarrow e^{tnx} \geqslant e^{tn\varepsilon}$$

Donc les événements $(S_n \geqslant \varepsilon)$ et $(e^{tnS_n} \geqslant e^{tn\varepsilon})$ sont égaux, donc ont même probabilité.
De plus par positivité de e^{tnS_n}, on a par l'inégalité de Markov :

$$P(e^{tnS_n} \geqslant e^{tn\varepsilon}) \leqslant \frac{E(e^{tnS_n})}{e^{tn\varepsilon}}$$

Enfin

$$E(e^{tnS_n}) = E(e^{tX_1} e^{tX_2} \dots e^{tX_n}) = E(e^{tX_1}) E(e^{tX_2}) \dots E(e^{tX_n})$$

car $e^{tX_1}, e^{tX_2}, \dots e^{tX_n}$ sont indépendantes d'après le lemme des coalitions.
Ainsi

$$\boxed{P\big(S_n \geqslant \varepsilon\big) = P\big(e^{tnS_n} \geqslant e^{tn\varepsilon}\big) \leqslant \frac{\big(E\big(e^{tX}\big)\big)^n}{e^{tn\varepsilon}}}$$

Majoration de $E\big(e^{tX}\big)$.

5. Soit $a > 1$. On considère la fonction g_a définie par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g_a(x) = \frac{1-x}{2}a^{-1} + \frac{1+x}{2}a - a^x.$$

Montrer que la fonction g_a est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme combinaison linéaire de fonctions dérivables, et sa dérivée est

$$x \mapsto \frac{a-a^{-1}}{2} - (\ln a)a^x$$

qui est décroissante comme différence d'une fonction constante et d'une fonction croissante (car $a > 1$).

Donc la fonction g_a est concave. Le graphe de sa restriction à $[-1, 1]$ est donc au dessus de sa corde.

Or $g_a(-1) = a^{-1} + 0 - a^{-1} = 0$ et $g_a(1) = 0 + a - a = 0$.

La corde est donc la droite $y = 0$ et ainsi $\boxed{\text{pour tout } x \in [-1, 1],\ g_a(x) \geqslant 0}$.

6. Soit $t > 0$. Appliquant la question précédente à $a = e^t > 1$, on a :

$$\boxed{\forall x \in [-1, 1],\ e^{tx} \leqslant \frac{1-x}{2}e^{-t} + \frac{1+x}{2}e^t}$$

7. Soit $t > 0$. Comme X est à valeurs dans $[-1, 1]$, on a par la question précédente et par croissance et linéarité de l'espérance :

$$\boxed{E\left(e^{tX}\right) \leqslant \frac{e^{-t}}{2}(E(1_\Omega) - E(X)) + \frac{e^t}{2}(E(1_\Omega) + E(X)) = \text{ch } t}$$

car $E(X) = 0$ et $E(1_\Omega) = 1$.

8. Soient $t \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}$.

On a

$$(2k)! = 1.2.\ldots.(2k) \geqslant 2.4.\ldots.(2k-2).(2k) = 2^k k! > 0$$

et $t^{2k} \leqslant 0$. Donc

$$\frac{t^{2k}}{(2k)!} \leqslant \frac{1}{k!}\left(\frac{t^2}{2}\right)^k.$$

Par croissance de la sommation des séries,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\left(\frac{t^2}{2}\right)^k$$

c'est-à-dire ch $t \leqslant e^{t^2/2}$.

Par la question précédente, on a ainsi

$$\boxed{\forall t > 0,\ E\left(e^{tX}\right) \leqslant e^{t^2/2}}$$

Majoration de $P(|S_n| \geqslant \varepsilon)$

Dans ce paragraphe, on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et un réel $\varepsilon > 0$.

9. Comme exp est croissante, il suffit de minimiser $t \mapsto -nt\varepsilon + nt^2/2 = nt(-\varepsilon + \frac{t}{2}$ qui atteint son minimum en la demi-somme de ses racines car elle est polynomiale de degré deux à coefficient dominant positif.
   Ainsi $\mathbb{R} \ni t \longmapsto e^{-nt\varepsilon+nt^2/2}$ atteint son minimum en $\frac{0+2\varepsilon}{2} = \boxed{\varepsilon}$.
10. La valeur du minimum de la question précédente est $e^{-n\varepsilon^2+n\frac{\varepsilon^2}{2}} = e^{-n\varepsilon^2/2}$.
    D'après les questions précédentes,
    pour tout $t > 0$ on a
    $$P(S_n \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{(e^{t^2/2})^n}{e^{tn\varepsilon}}$$
    Appliquant ceci à $t = \varepsilon$, il vient :
    $$\boxed{P(S_n \geqslant \varepsilon) \leqslant e^{-n\varepsilon^2/2}}$$
    Enfin,
    $$P(|S_n| \geqslant \varepsilon) = P(S_n \geqslant \varepsilon) + P(-S_n \geqslant \varepsilon) \leqslant e^{-n\varepsilon^2/2} + e^{-n\varepsilon^2/2} = \boxed{2e^{-n\varepsilon^2/2}}$$
    car la suite $(-X_n)$ vérifie les mêmes propriétés que la suite (X_n) (variables centrées indépendantes à valeurs dans $[-1, 1]$).

Conclusion

11. Soit $\varepsilon > 0$.
    $$0 \leqslant n^2 P(|S_n| > \varepsilon) \leqslant 2ne^{-n\varepsilon^2/2} \underset{n\to\infty}{\to} 0$$
    par croissances comparées, donc par encadrement $n^2 P(|S_n| > \varepsilon) \underset{n\to\infty}{\to} 0$.
    Ainsi $P(|S_n| > \varepsilon) = o(1/n^2)$ et comme $\sum(1/n^2)$ converge absolument, $\boxed{\sum_{n\geqslant 0} P(|S_n| > \varepsilon) \text{ converge}}$.
12. On fixe un réel $\varepsilon > 0$. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
    $$B_n(\varepsilon) = \bigcup_{m\geqslant n} \{\omega \in \Omega\ ;\ |S_m(\omega)| > \varepsilon\}.$$
    Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\varepsilon > 0$.
    $B_n(\varepsilon)$ est un événement comme réunion indexée par l'ensemble dénombrable $[\![m, \infty[\![$ des événements $(|S_m| > \varepsilon)$ (ce sont bien des événements car les fonctions $|S_m|$ sont des variables aléatoires discrètes).
    De plus la suite $(B_n(\varepsilon))_{n\geqslant 0}$ est décroissante au sens de l'inclusion.
    Par continuité décroissante,
    $$P\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} B_n(\varepsilon)\right) = \lim_{n\to\infty} P(B_n(\varepsilon)$$
    Enfin pour tout $n \in \mathbb{N}$,
    $$0 \leqslant P(B_n(\varepsilon)) \leqslant \sum_{m=n}^{\infty} P(|S_m| > \epsilon) \quad \text{(inégalité de Boole)}$$
    Or la suite $(\sum_{m=n}^{\infty} P(|S_m| > \epsilon))_{n\geqslant 0}$ converge vers zéro comme suite des restes d'une série convergente.
    Donc par encadrement $P(B_n(\varepsilon)) \underset{n\to\infty}{\to} 0$.
    Ainsi $\boxed{P\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} B_n(\varepsilon)\right) = 0}$.

13. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\Omega_k = \left\{\omega \in \Omega \; ; \; \exists n \in \mathbb{N}^*, \; \forall m \geqslant n, \; |S_m(\omega)| \leqslant \frac{1}{k}\right\} = \cup_{n\in\mathbb{N}} \cap_{m\geqslant n} \left(|S_m| \leqslant \frac{1}{k}\right) = \overline{\cap_{n\in\mathbb{N}^*} B_n(1/k)}$$

est un événement comme complémentaire (dans Ω) d'un événement.

$$\begin{aligned} A &= \left\{\omega \in \Omega\,;\; \lim_{n\to\infty} S_n(\omega) = 0\right\} \\ &= \{\omega \in \Omega\,;\; \forall \varepsilon > 0\; \exists n \in \mathbb{N}\; \forall m \geqslant n\; |S_m(\omega)| \leqslant \varepsilon\} \\ &= \left\{\omega \in \Omega\,;\; \forall k \in \mathbb{N}^*\; \exists n \in \mathbb{N}\; \forall m \geqslant n\; |S_m(\omega)| \leqslant \frac{1}{k}\right\} \\ &= \boxed{\cap_{k\in\mathbb{N}^*} \Omega_k} \end{aligned}$$

Donc $\boxed{A \text{ est un événement}}$ comme intersection d'une famille dénombrable d'événements.

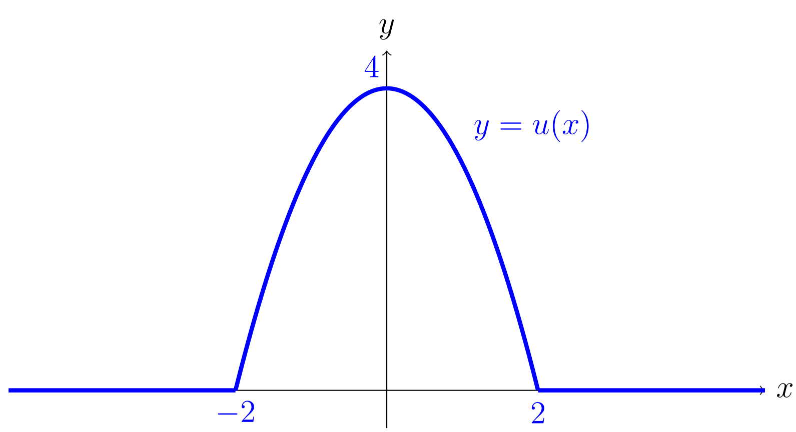
14. D'après les deux questions précédentes $\boxed{A \text{ est presque certain}}$ comme intersection d'une famille dénombrable d'événements presque certains.

Problème 2 (CCINP MP 2006)

Partie I - Découverte des fonctions tests

1. Soit A une partie de $\mathbb{R}$.
Si $\bar{A}$ est compacte alors elle est bornée, donc A l'est aussi car $A \subset \bar{A}$.
Réciproquement, si A est bornée alors il existe $R \in \mathbb{R}^+$ tel que $A \subset [-R, R]$ et on a $\bar{A} \subset [-R, R]$ car $[-R, R]$ est un fermé contenant A et $\bar{A}$ est le plus petit fermé contenant A. Donc $\bar{A}$ est fermé.
De plus $\bar{A}$ est fermé et $\mathbb{R}$ est de dimension finie (sur $\mathbb{R}$), donc $\bar{A}$ est compact.

2. Quelques exemples
   a) On note u la fonction paire définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = 4 - x^2$ si $x \in [0, 2]$ et $u(x) = 0$ si $x > 2$.



   Le support de u est $\overline{]-2, 2[} = [-2, 2]$, qui est compact. Mais u n'est pas de classe $\mathcal{C}^\infty$ car elle n'est pas dérivable en 2 puisque ses dérivées à gauche et à droite en ce point diffèrent : elles valent respectivement -4 et 0.
   $\boxed{\text{La fonction } u \text{ n'est donc pas une fonction test}}$.

   b) $\boxed{\text{La fonction sinus n'est pas une fonction test}}$ car son support n'est pas borné, donc n'est pas compact. (Ce support contient $\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$, on peut montrer que ce support est $\mathbb{R}$ mais ce n'est pas indispensable).

3. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \mathrm{e}^{\frac{-1}{x}}$ si $x > 0$ et $h(x) = 0$ si $x \leqslant 0$.

a) $\forall x > 0\ h^{(0)}(x) = P_0(1/x)e^{-1/x}$ avec $\boxed{P_0 = 1}$.
Soit $k \in \mathbb{N}$ et $P_k \in \mathbb{R}[X]$ tels que $\forall x > 0\ h^{(k)}(x) = P_k(1/x)e^{-1/x}$.
Alors
$$\forall x > 0\ h^{(k+1)}(x) = (\frac{-1}{x^2}P_k'(1/x) + \frac{1}{x^2}P_k(1/x))e^{-1/x} = P_{k+1}(1/x)e^{-1/x}$$
avec $\boxed{P_{k+1} = X^2(-P_k' + P_k)}$.
Ainsi par récurrence
$$\forall k \in \mathbb{N}\ \forall x > 0\ h^{(k)}(x) = P_k\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{\frac{-1}{x}}$$
où (P_k) est la suite de polynômes définie par
$$P_0 = 1 \text{ et } \forall k \in \mathbb{N}\ P_{k+1} = X^2(-P_k' + P_k)$$
Une récurrence immédiate montre que $\forall k \in \mathbb{N}$ $\boxed{deg(P_k) = 2k}$ (car $deg(P_k') < deg(P_k)$ car P_k est non nul)
On en déduit que $h^{(k)}(x) = O_{x\to 0^+}\left((1/x)^{2k}e^{-1/x}\right)$. Par croissance comparée, $h^{(k)}(x) \underset{x\to 0^+}{\to} 0$.
Montrons par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}$, h est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbb{R}$ et $h^{(k)}(0) = 0$.
La propriété est vraie au rang 0 car h est continue sur $]-\infty, 0]$ et sur $]0, +\infty[$ et $h(x) \underset{x\to 0^+}{\to} 0 = h(0)$.
Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que la propriété soit vraie au rang k.
Comme $h^{(k)}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ et comme $(h'_{(k)}$ admet pour limite 0 en 0^+, ainsi qu'en 0^- car $h^{(k+1)}$ est nulle sur $]-\infty, 0[$, on en déduit par le théorème de limite de la dérivée que $h^{(k)}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que $(h^{(k)})'(0) = 0$.
Par récurrence, la propriété est vraie à tout ordre.
Ainsi $\boxed{h \text{ est de classe } \mathscr{C}^\infty \text{ sur } \mathbb{R}}$.

b) La fonction $\boxed{h \text{ n'est pas une fonction test}}$ car son support est $\overline{]0, +\infty[} = [0, +\infty[$ qui n'est pas borné.
La fonction $\boxed{h \text{ n'est pas développable en série entière}}$ au voisinage de 0 car sa série de Taylor est nulle, donc sa somme est nulle, donc ne coïncide avec h sur aucun voisinage de zéro car h ne s'annule jamais sur $]0, +\infty[$.

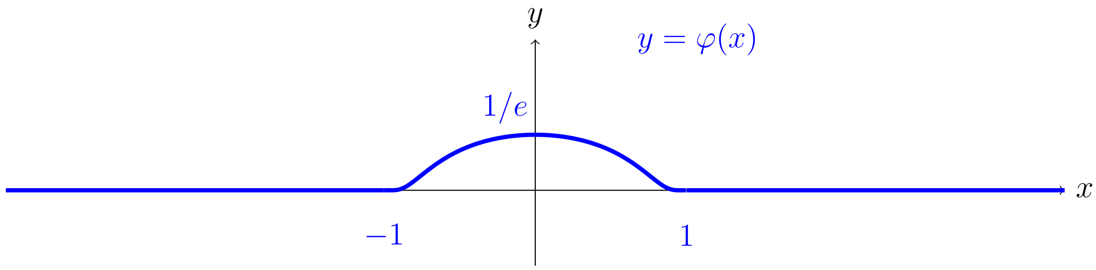
4. On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction φ par $\varphi(x) = h(-(x+1)(x-1))$.

a) Soit $x \in \mathbb{R}$.
$$\varphi(x) \neq 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-1) < 0 \Leftrightarrow x \in]-1, 1[$$
(cf signe d'un trinôme du second degré en fonction de la position par rapport à ses racines)
Comme $]-1, 1[$ est borné, son adhérence (qui est $[-1, 1]$) est compacte. Donc φ est à support compact.
De plus φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ comme composée des fonctions h et $x \mapsto -(x+1)(x-1)$ qui sont de classe $\mathcal{C}^\infty$.
Donc $\boxed{\varphi \text{ est une fonction test}}$.
Sur $\mathbb{R}_+^*$, h est strictement croissante comme composée de fonctions strictement croissantes. De plus $\forall x > 0$, $h(x) > 0 = h(0)$. Donc h est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

La fonction $x \mapsto -(x+1)(x-1)$ est strictement croissante sur $[-1,0]$ et sur $[0,1]$, et à valeurs positives sur ces intervalles.

Donc $\boxed{\varphi \text{ est strictement croissante sur } [-1,0] \text{ et strictement décroissante sur } [0,1]}$.

$\boxed{\text{Sur }]-\infty,-1] \text{ et sur } [1,+\infty[\text{, elle est constante}}$ de valeur nulle.



b) En utilisant l'interpolation (ici linéaire) de Lagrange, La fonction $x \mapsto \boxed{\varphi(-1\dfrac{x-3}{8-3}+1\dfrac{x-8}{3-8})}$ est une fonction test dont le support est $[3,8]$.

La fonction $x \mapsto \boxed{\varphi(-1\dfrac{x-1}{2-1}+1\dfrac{x-5}{1-2})+\varphi(-1\dfrac{x-5}{6-5}+1\dfrac{x-6}{5-6})}$ est une fonction test dont le support est $[1,2]\cup[5,6]$.

5. $\boxed{\text{Les limites en } +\infty \text{ et } -\infty \text{ d'une fonction définie sur } \mathbb{R} \text{ à support compact sont nulles}}$ car une telle fonction est nulle en dehors d'un ensemble bornée, donc est nulle au voisinage des infinis.

6. *Construction d'une suite régularisante.*

a) La fonction φ de la question 4. est intégrable sur $\mathbb{R}$ car elle est continue sur $[-1,1]$, donc intégrable sur ce segment, et elle est également intégrable sur $]-\infty,-1]$ et sur $[1,+\infty[$ car nulle sur ces intervalles.

De plus $\int_{\mathbb{R}}\varphi$ est strictement positive comme intégrale d'une fonction continue positive non identiquement nulle sur un intervalle contenant au moins deux points.

Posant $\boxed{\rho : t \mapsto \dfrac{1}{\int_{\mathbb{R}}\varphi}\varphi(t)}$, ρ est une une fonction test positive, de support $[-1,1]$, intégrable sur $\mathbb{R}$ et telle que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\rho(t)\mathrm{d}t = 1$.

b) Pour tout entier naturel non nul n, le support de ρ_n est $\boxed{[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}]}$ et par le changement de variable $t = nxdt = ndx$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\rho_n(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} n\rho(nx)dx = \int_{-\infty}^{\infty}\rho(t)dt = \boxed{1}$$

Partie II - Théorème de Withney

7. Si $F = Z(f) = f^{-1}(\{0\}$ et si f est $\mathcal{C}^\infty$, alors comme f est continue et $\{0\}$ est fermé, F est fermé comme image réciproque d'un fermé par une application continue.

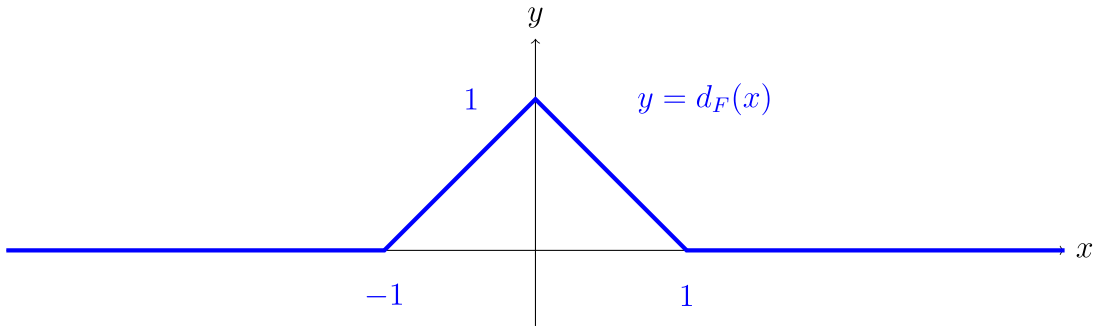
8. Soit F une partie fermée de $\mathbb{R}$. Pour tout réel x, on note $d(x,F) = \inf_{y\in F}|x-y|$ et d_F l'application définie sur $\mathbb{R}$ par $d_F(x) = d(x,F)$.

$Z(d_F)$ contient F. Réciproquement, si $x \in U = \mathbb{R}\setminus F$ alors comme U est ouvert il existe $\delta > 0$ tel que $B(x,\delta) \subset U$ et alors $y \mapsto |x-y|$ est minorée par δ sur F donc $d(x,F) \geqslant \delta > 0$.

Ainsi $\boxed{Z(d_F) = F}$.

On en déduirait une preuve du théorème de Whitney $\boxed{\text{si } d_F \text{ était de classe } \mathcal{C}^\infty}$.

Représentation graphique de d_F dans le cas particulier où $F =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$.



L'application d_F $\boxed{\text{n'est pas de classe } \mathcal{C}^\infty}$ car elle n'est pas dérivable en 1, car en ce point sa dérivée à gauche est -1 et sa dérivée à droite est 0.

9. (i) Si F est le complémentaire d'un intervalle ouvert $]a, b[$ (supposé non vide, sinon prendre $f = cte \neq 0$), distinguons quatre cas :

si a et b sont finis, posons $f : x \mapsto \boxed{\varphi(-1.\dfrac{x-a}{b-a} + 1.\dfrac{x-b}{a-b})}$ où φ est la fonction de la question 4

si a est fini et $b = +\infty$ posons $\varphi_k : x \boxed{\mapsto \varphi(x-a)}$

si $a = -\infty$ et b est fini posons $\varphi_k : x \mapsto \boxed{\varphi(b-x)}$

Si $a = -\infty$ et $b = +\infty$ posons $\varphi_k : x \mapsto \boxed{1}$.

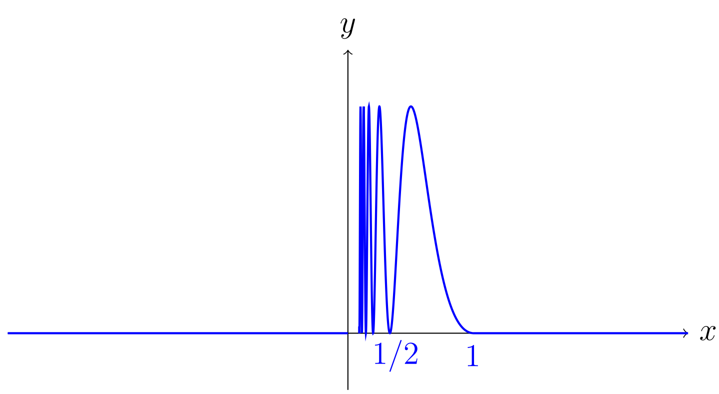
Dans les quatre cas, on obtient une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ dont l'ensemble des zéros est F.

(ii) Si F est le complémentaire de la réunion de deux intervalles ouverts disjoints $]a, b[$ et $]c, d[$ supposés non vides, on obtient une fonction de classe $\mathcal{C}\infty$ dont l'ensemble des zéros est F en $\boxed{\text{sommant deux fonctions construites comme en (i)}}$

10. Soit F un fermé de $\mathbb{R}$. Soit Ω son complémentaire dans $\mathbb{R}$. C'est un ouvert.

Admettons que $\Omega = \bigcup_{k \in I}]\, a_k, b_k[$, où I est une partie de $\mathbb{N}$ et les intervalles $]a_k, b_k[$ sont deux à deux disjoints et tous non vides.

Remarque : Naïvement, on pourrait penser qu'il suffit d'ajouter des fonctions tests comme on l'a fait dans le cas précédent, mais cela n'est pas si aisé dans le cas où I est infini. Par exemple si $\forall k \in \mathbb{N}^*$ $]a_k, b_k[=]\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}[$, une sommation naïve (sans renormalisation) conduit à une fonction discontinue en 0.



Pour tout $k \in I$ tel que a_k et b_k sont finies, posons

$$\varphi_k : x \mapsto \frac{1}{(k+1)^2} e^{-1/(b_k - a_k)} \varphi(-1.\frac{x-a_k}{b_k-a_k} + 1.\frac{x-b_k}{a_k-b_k}) = \frac{1}{(k+1)^2} e^{-1/(b_k-a_k)} \varphi\Big(\frac{a_k+b_k-2x}{b_k-a_k}\Big)$$

Pour $k \in I$ tel que a_k est fini et $b_k = +\infty$ posons $\varphi_k : x \mapsto \frac{1}{(k+1)^2}\varphi(x - a_k)$
Pour $k \in I$ tel que $a_k = -\infty$ et b_k est fini posons $\varphi_k : x \mapsto \frac{1}{(k+1)^2}\varphi(b_k - x)$
Si $a_k = -\infty$ et $b_k = +\infty$ posons $\varphi_k : x \mapsto \frac{1}{(k+1)^2}$.
et pour $k \notin I$ posons $\varphi_k : x \mapsto 0$.
Dans tous les cas φ_k est positive, et si $k \in I$ on a $Z(\varphi_k) = \mathbb{R}\backslash]a_k, b_k[$.
Ces fonctions sont toutes de classe $\mathcal{C}^\infty$ et pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tout $k \in I$ tel que a_k et b_k sont finis,

$$||\varphi_k^{(p)}||_\infty \leqslant \frac{1}{(k+1)^2} e^{-1/(b_k - a_k)} \left(\frac{2}{b_k - a_k}\right)^p ||\varphi^{(p)}||_\infty$$

($\varphi^{(p)}$ est continue sur $[a_k, b_k]$ donc bornée sur ce segment, et nulle ailleurs, donc elle est bornée sur $\mathbb{R}$.
La fonction $g_p : t \mapsto e^{-t}(2t)^p$ est bornée sur $\mathbb{R}^+$ (étudier ses variations ou le déduire de sa continuité et du fait qu'elle a une limite finie à l'infini). On a donc

$$||\varphi_k^{(p)}||_\infty \leqslant \frac{1}{(k+1)^2}||\varphi^{(p)}||.||g_p||_{\infty,\mathbb{R}^+}$$

Cette majoration vaut aussi pour $k \notin I$. De plus il existe au plus deux valeurs de k dans I pour lesquelles a_k ou b_k n'est pas fini.
Notons $\boxed{f \text{ la somme de la série de fonctions } \sum_{k\geqslant 0}\varphi_k}$.
Par la majoration précédente, pour tout $p \in \mathbb{N}$, la somme de la série $\sum_{k\geqslant 0}\varphi_k^{(p)}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.
Donc $\boxed{f \text{ est de classe } \mathcal{C}^\infty}$.
De plus, comme une somme de nombres positifs n'est nulle que lorsque tous ses termes sont nuls, $\boxed{Z(f) = \mathbb{R} \setminus \Omega = F}$.

11. Démontrons le résultat admis à la question précédente.
Ω est réunion de ses composantes connexes par arcs. Ces composantes connexes par arcs sont $\boxed{\text{deux à deux disjointes}}$ puisque ce sont les classes d'équivalence d'une relation d'équivalence.
Ces composantes connexes par arcs étant des parties connexes par arcs de $\mathbb{R}$, ce sont des $\boxed{\text{intervalles}}$.
Ils sont non vides car ce sont des classes d'équivalence.
Montrons que ces intervalles sont ouverts.
Soit J un tel intervalle. Raisonnons par l'absurde et supposons par exemple qu'il contienne sa borne supérieure, notée b.
Comme Ω est ouvert et $b \in J \subset \Omega$, il existe $\delta > 0$ tel que $]b-\delta, b+\delta[\subset \Omega$. Mais alors $J' = J \cup [b, b+\delta[$ est un intervalle inclus dans Ω. Cet intervalle est connexe par arc, donc la composante connexe par arcs dans Ω de b contient J', ce qui est contradictoire car la composante connexe par arcs dans Ω de b est J.
De même J ne contient pas sa borne inférieure. Donc c'est un intervalle $\boxed{\text{ouvert}}$.
Montrons enfin que l'ensemble des composantes connexes par arc de Ω est au plus dénombrable.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble E_n des composantes connexes par arcs de Ω incluses dans $[-n, n]$ est au plus dénombrable car la famille des longueurs de ces composantes connexes est sommable car sa somme est majorée par $2n$ donc est finie.
Ainsi l'ensemble des composantes connexes par arcs bornées de Ω est au plus dénombrable comme réunion de la famille dénombrable $(E_n)_{n\in\mathbb{B}}$ d'ensembles au plus dénombrables.
De plus il existe au plus deux composantes connexes par arcs non bornées de Ω.
Ainsi ensemble des composantes connexes par arcs de Ω est $\boxed{\text{au plus dénombrable}}$ comme réunion d'un ensemble au plus dénombrable et d'un ensemble fini.