Le sujet est composé de deux problèmes indépendants

Problème 1 (CCINP PSI 2018)

Notations et définitions

— $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels et $\mathbb{R}$ celui des nombres réels.
— Si X est une variable aléatoire d'espérance finie, on note $E(X)$ cette espérance.

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé. Soit X une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ à valeurs dans $[-1, 1]$. On considère dans ce problème une suite $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires *discrètes* sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, *indépendantes et de même loi que* X. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note

$$S_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}.$$

Objectif
Montrer que si la variable aléatoire X est centrée, $(E(X) = 0)$, alors la suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$ converge presque sûrement vers la constante 0. Il s'agit d'un cas particulier de la loi forte des grands nombres.

1. On ne suppose pas X centrée dans cette question. Montrer que X est d'espérance finie.

On suppose désormais que X est *centrée*.

2. Énoncer et démontrer l'inégalité de Markov.
3. En déduire que, pour tout $\alpha > 0$:

$$P\big(|X| \geqslant \alpha\big) \leqslant \frac{E\big(|X|\big)}{\alpha}.$$

4. Montrer que, pour tout $t > 0$, pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$P\big(S_n \geqslant \varepsilon\big) = P\big(e^{tnS_n} \geqslant e^{tn\varepsilon}\big) \leqslant \frac{\big(E\big(e^{tX}\big)\big)^n}{e^{tn\varepsilon}}.$$

Majoration de $E\big(e^{tX}\big)$.

5. Soit $a > 1$. On considère la fonction g_a définie par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g_a(x) = \frac{1-x}{2}a^{-1} + \frac{1+x}{2}a - a^x.$$

Montrer que la fonction g_a est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que la fonction g_a' est décroissante sur $\mathbb{R}$. En déduire, en remarquant que $g_a(-1) = g_a(1) = 0$, que, pour tout $x \in [-1, 1]$, $g_a(x) \geqslant 0$.

6. En déduire que

$$\forall t > 0,\ \forall x \in [-1, 1],\ e^{tx} \leqslant \frac{1-x}{2}e^{-t} + \frac{1+x}{2}e^{t}.$$

7. En déduire que

$$\forall t > 0,\ E\big(e^{tX}\big) \leqslant \mathrm{ch}(t).$$

8. Montrer que

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall t \in \mathbb{R},\ \frac{t^{2k}}{(2k)!} \leqslant \frac{1}{k!}\left(\frac{t^2}{2}\right)^k.$$

En déduire que

$$\forall t > 0,\ E\big(e^{tX}\big) \leqslant e^{t^2/2}.$$

Majoration de $P(|S_n| \geqslant \varepsilon)$

Dans ce paragraphe, on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et un réel $\varepsilon > 0$.

9. Montrer que la fonction $\mathbb{R} \ni t \longmapsto e^{-nt\varepsilon + nt^2/2}$ atteint un minimum en un point que l'on précisera.
10. En déduire que $P(S_n \geqslant \varepsilon) \leqslant e^{-n\varepsilon^2/2}$, puis que

$$P(|S_n| \geqslant \varepsilon) \leqslant 2e^{-n\varepsilon^2/2}.$$

Conclusion

11. Montrer que, pour tout réel $\varepsilon > 0$, la série de terme général $P(|S_n| > \varepsilon)$ converge.
12. On fixe un réel $\varepsilon > 0$. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$B_n(\varepsilon) = \bigcup_{m \geqslant n} \big\{\omega \in \Omega\ ;\ |S_m(\omega)| > \varepsilon\big\}.$$

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $\varepsilon > 0$, $B_n(\varepsilon)$ est un événement et que $P\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} B_n(\varepsilon)\right) = 0$.

13. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, posons

$$\Omega_k = \left\{\omega \in \Omega\ ;\ \exists n \in \mathbb{N}^*,\ \forall m \geqslant n,\ |S_m(\omega)| \leqslant \frac{1}{k}\right\}.$$

Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, Ω_k est un événement.
Écrire l'ensemble $A = \{\omega \in \Omega\,;\ \lim_{n\to\infty} S_n(\omega) = 0\}$ à l'aide des événements Ω_k, $k \in \mathbb{N}^*$. En déduire que A est un événement.

14. Déduire des questions précédentes que $P(A) = 1$.

Problème 2 (CCINP MP 2006)

Dans tout le problème, $\mathbb{R}$ est muni de sa norme naturelle : la valeur absolue.
Toutes les fonctions considérées seront à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Si h est une fonction de classe $\mathscr{C}^k$, $h^{(k)}$ désigne la dérivée k-ième de h.
Si h est une fonction bornée sur $\mathbb{R}$, on note $\|h\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |h(x)|$.
Une fonction définie sur $\mathbb{R}$ est dite nulle à l'infini si ses limites en $+\infty$ et en $-\infty$ sont nulles.

Objectifs

Le *support* d'une fonction f définie sur un intervalle I, noté Supp f, est l'adhérence de l'ensemble des points où elle ne s'annule pas : $\operatorname{Supp} f = \overline{\{x \in I, f(x) \neq 0\}}$.
Une fonction est dite à *support compact* si son support est une partie compacte de $\mathbb{R}$.
On appellera *fonction test*, une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ à support compact.
On note $\mathscr{T}$ l'ensemble des fonctions tests. Il est facile de vérifier que $\mathscr{T}$ est une $\mathbb{R}$-algèbre.

Le but du sujet est de découvrir des fonctions tests dans la partie I et de les utiliser pour démontrer un théorème de Whitney à la partie II.

Partie I - Découverte des fonctions tests

1. Soit A une partie de $\mathbb{R}$. Montrer que A est bornée si et seulement si son adhérence $\bar{A}$ est une partie compacte de $\mathbb{R}$. Une fonction f définie sur I est donc à support compact si et seulement si $\{x \in I, f(x) \neq 0\}$ est une partie bornée de $\mathbb{R}$.
2. Quelques exemples
   a) On note u la fonction paire définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = 4 - x^2$ si $x \in [0, 2]$ et $u(x) = 0$ si $x > 2$. Représenter la fonction u et déterminer son support. La fonction u est-elle à support compact ? La fonction u est-elle une fonction test ?
   b) La fonction sinus est-elle une fonction test ?
3. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \mathrm{e}^{\frac{-1}{x}}$ si $x > 0$ et $h(x) = 0$ si $x \leqslant 0$.
   a) La fonction h est, d'après les théorèmes généraux, de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$. Montrer que pour tout entier naturel k, il existe un polynôme P_k dont on précisera le degré tel que pour tout réel x strictement positif, $h^{(k)}(x) = P_k\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{\frac{-1}{x}}$. En déduire que h est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
   b) La fonction h est-elle une fonction test ? La fonction h est-elle développable en série entière au voisinage de 0 ?
4. On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction φ par $\varphi(x) = h(-(x + 1)(x - 1))$.
   a) Déterminer le support de φ puis justifier que c'est une fonction test. Déterminer les variations de φ puis tracer l'allure de sa courbe.
   b) Déterminer une fonction test dont le support est $[3, 8]$ puis une fonction test dont le support est $[1, 2] \cup [5, 6]$.
5. Déterminer les limites en $+\infty$ et $-\infty$ d'une fonction définie sur $\mathbb{R}$ à support compact.
6. *Construction d'une suite régularisante.*
   a) Justifier que la fonction φ de la question 4. est intégrable sur $\mathbb{R}$ et que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\mathrm{d}t > 0$.

      En déduire l'expression d'une fonction test ρ positive, de support $[-1, 1]$, intégrable sur $\mathbb{R}$ et telle que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \rho(t)\mathrm{d}t = 1$.

Pour tout entier naturel non nul n, on définit sur $\mathbb{R}$ la fonction ρ_n par $\rho_n(x) = n\rho(nx)$. La suite de fonctions $(\rho_n)_n$ est appelée *suite régularisante*.

b) Pour tout entier naturel non nul n, déterminer le support de ρ_n et calculer $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \rho_n(t)\mathrm{d}t$.

Partie II - Théorème de Withney

Le but de cette partie est de démontrer le théorème suivant :

Théorème de Whitney : *Si F est une partie fermée de $\mathbb{R}$, alors il existe une fonction f de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ telle que $F = Z(f)$ où $Z(f) = \{x \in \mathbb{R}, f(x) = 0\}$.*

7. Justifier que la réciproque du théorème de Whitney est vraie.
8. *Une première tentative de preuve... infructueuse*

   Soit F une partie fermée de $\mathbb{R}$. Pour tout réel x, on note $d(x,F) = \inf_{y\in F} |x-y|$ et d_F l'application définie sur $\mathbb{R}$ par $d_F(x) = d(x,F)$.

   Déterminer $Z(d_F)$. Quelle propriété notée (P) devrait vérifier l'application d_F pour que le théorème de Whitney puisse être démontré ?

   Représenter graphiquement d_F dans le cas particulier où $F =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$.

   L'application d_F vérifie-t-elle cette propriété (P) ? Justifier votre réponse.
9. *Utilisation de fonctions tests*

   Démontrer le théorème de Whitney dans les cas suivants :

   (i) F est le complémentaire d'un intervalle ouvert $]a,b[$.

   (ii) F est le complémentaire de la réunion de deux intervalles ouverts disjoints.
10. Démontrer le théorème de Whitney dans le cas général. On utilisera librement le résultat suivant : une partie ouverte Ω de $\mathbb{R}$, peut s'écrire comme une réunion finie ou dénombrable d'intervalles ouverts disjoints, c'est-à-dire $\Omega = \bigcup_{k\in I}]a_k, b_k[$, où I est une partie de $\mathbb{N}$.
11. (Pas dans l'énoncé initial) Démontrer le résultat admis à la question précédente.