A. Norme d'opérateur d'une matrice

1. L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est de dimension finie. L'ensemble S^{n-1} est évidemment une partie bornée de $\mathbb{R}^n$ et il est fermé car c'est une sphère.
   Donc $\boxed{S^{n-1} \text{ est un compact de } \mathbb{R}^n.}$
   La fonction $x \mapsto Mx$ est continue sur $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, car linéaire en dimension finie, et $y \mapsto \|y\|$ est continue sur $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ d'où $x \mapsto \|Mx\|$ est continue sur $\mathbb{R}^n$, en particulier sur le compact S^{n-1} et à valeurs réelles.
   Par le théorème des bornes atteintes, cette fonction admet un maximum.
   $\boxed{\text{Cela justifie l'existence de } \|M\|_{\text{op}}}$.
2. Soit x et $y \in \mathbb{R}^n$.
   Si $x = y$, l'inégalité à démontrer est vraie car $0 \leqslant 0$.
   Si $x \neq y$, alors $\|x - y\| \neq 0$ et $\frac{1}{\|x-y\|}(x - y) \in S^{n-1}$, donc :
   $$\frac{1}{\|x-y\|}\|M.(x-y)\| = \left\| M.\frac{1}{\|x-y\|}(x-y)\right\| \leqslant \|M\|_{\text{op}}.$$
   Comme $\|x - y\| > 0$, on obtient $\boxed{\|Mx - My\| \leqslant \|M\|_{\text{op}} \|x - y\|.}$
3. On suppose dans un premier temps que $M = \text{diag}(a_1, \dots, a_n)$ est une matrice diagonale avec $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$.
   Les éléments $a_1, \dots, a_n$ sont les valeurs propres de M.
   Soit $k_0 \in [\![1, n]\!]$ tel que $|a_{k_0}| = \max\{|\lambda|, \lambda \in \sigma(M)\}$ qui existe bien car $\sigma(M)$ est fini
   Soit $x = (x_1, \dots, x_n)^\top \in S^{n-1}$. On a $Mx = (a_1x_1, \dots, a_nx_n)^\top$ et donc
   $$\|Mx\| = \sqrt{\sum_{1\leqslant i\leqslant n}(a_ix_i)^2} = \sqrt{\sum_{1\leqslant i\leqslant n}|a_i|^2x_i^2} \leqslant \sqrt{\sum_{1\leqslant i\leqslant n}|a_{k_0}|^2x_i^2} = |a_{k_0}|\|x\|$$
   donc $\|Mx\| \leqslant |a_{k_0}|$ donc $|a_{k_0}|$ majore $\{\|Mx\|\,; x \in S^{n-1}\}$
   Réciproquement, on note $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Comme $\|e_{k_0}\| = 1$, $e_{k_0} \in S^{n-1}$ et $\|Me_{k_0}\| = |a_{k_0}|\|e_{k_0}\| = |a_{k_0}|$ d'où
   $$\max\{|\lambda|, \lambda \in \sigma(M)\} = |a_{k_0}| = \max\{\|Mx\|\,; x \in S^{n-1}\} = \|M\|_{\text{op}}$$
   On suppose maintenant que M est symétrique réelle,
   D'après le théorème spectral il existe $\Omega \in {}_n(\mathbb{R})$ tel que $D = \Omega^\top M\Omega$ soit diagonale.
   Comme M et D sont semblables, on a : $\max\{|\lambda|, \lambda \in \sigma(D)\} = \max\{|\lambda|, \lambda \in \sigma(M)\}$
   De plus, $\{\|Mx\|\,; x \in S^{n-1}\} = \{\|\Omega D\Omega^\top x\|\,; x \in S^{n-1}\}$
   Les endomorphismes de $\mathbb{R}^n$ $x \mapsto \Omega^\top x$ et $x \mapsto \Omega x$ étant des isométries vectorielles on a
   $$\{\|Mx\|\,; x \in S^{n-1}\} = \{\|\Omega D\Omega^\top x\|\,; x \in S^{n-1}\} = \{\|D\Omega^\top x\|\,; x \in S^{n-1}\} = \{\|Dy\|\,; y \in S^{n-1}\}$$
   À l'aide du cas précédent :
   $$\|M\|_{\text{op}} = \max\{\|Mx\|\,; x \in S^{n-1}\} = \max\{\|Dx\|\,; x \in S^{n-1}\} = \|D\|_{\text{op}} = \max\{|\lambda|, \lambda \in \sigma(D)\}$$
   On peut conclure alors que $\boxed{\text{Si } M \text{ est symétrique alors } \max\{|\lambda|, \lambda \in \sigma(M)\} = \|M\|_{\text{op}}}$.

4. On remarque pour commencer que $\mathrm{rg}(J_n) = 1$ (colonnes non nulles identiques). On déduit alors du théorème du rang que $\dim \mathrm{Ker}(J_n) = n-1$.
Si $n = 1$, $\sigma(J_1) = \{1\}$ et $\dim E_1(J_1) = 1$.
Si $n \geqslant 2$, alors 0 est valeur propre de J_n et $\dim(E_0(J_n)) = n-1$.
De plus comme J_n est symétrique réelle, J_n est diagonalisable donc 0 est valeur propre de multiplicité $n-1$
De plus $J_n \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = n \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ ce qui permet de prouver que n est valeur propre de J_n
Comme $n-(n-1) = 1$ alors n est valeur propre de J_n de multiplicité 1 et donc $\dim(E_n(J_n)) = 1$
$\boxed{\text{Si } n \geqslant 2, \text{ alors } \sigma(J_n) = \{0, n\} \text{ et } \dim E_0(J_n) = n-1 \text{ et } \dim E_n(J_n) = 1}$
À l'aide de la question précédente, dans les deux cas, $\boxed{\|J_n\|_{\mathrm{op}} = n}$

5. Comme à la question 3), on note $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ qui est une base orthonormée. Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$.

$$\|Me_j\| = \left\| \sum_{k=1}^n M_{k,j} e_k \right\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n M_{k,j}^2} \geqslant \sqrt{M_{i,j}^2} = |M_{i,j}|$$

Or $e_j \in S^{n-1}$ donc $|M_{i,j}| \leqslant \|Me_j\| \leqslant \|M\|_{\mathrm{op}}$.
Par conséquent, $\boxed{\max\{|M_{i,j}|, (i,j) \in [\![1,n]\!]^2\} \leqslant \|M\|_{\mathrm{op}}}$.

6. Soit $x \in S^{n-1}$. On a
$$\|Mx\|^2 = \sum_{i=1}^n (Mx)_i^2 = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n M_{i,j} x_j \right)^2$$
Par inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^n$, on a
$$\left(\sum_{j=1}^n M_{i,j} x_j \right)^2 \leqslant \left(\sum_{j=1}^n M_{i,j}^2 \right) \left(\sum_{j=1}^n x_j^2 \right) = \sum_{j=1}^n M_{i,j}^2 \tag{CS$_i$}$$
On en déduit que
$$\|Mx\|^2 \leqslant \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n M_{i,j}^2$$
En passant à la racine carrée puis au maximum sur x, on a donc
$$\boxed{\|M\|_{\mathrm{op}} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n M_{i,j}^2}}$$
Supposons qu'il y ait égalité. Soit $x \in S^{n-1}$ tel que $\|Mx\| = \|M\|_{\mathrm{op}}$. Le calcul ci-dessus affirme alors que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$ l'inégalité de Cauchy-Schwarz (CS$_i$) est une égalité ce qui implique que la i-ième ligne de M est colinéaire au vecteur x. C'est-à-dire, toutes les lignes de M sont proportionnelles à x. On obtient $\mathrm{rg}(M) \leqslant 1$.
Réciproquement, si $\mathrm{rg}(M) \leqslant 1$, toutes les lignes de M sont multiples d'un vecteur x de norme 1. Pour ce vecteur x, nos inégalités sont des égalités et le majorant trouvé est un maximum.

$$\boxed{\|M\|_{\text{op}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(M_{i,j})^2} \text{ si et seulement si } \mathrm{rg}(M) \leqslant 1}$$

7. Soit $M \in \Sigma_n$. On a $\|M\|_{\text{op}} \leqslant \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}(M_{i,j})^2} \leqslant \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} 1} = \sqrt{n^2}$ donc $\boxed{\|M\|_{\text{op}} \leqslant n}$

   On suppose que $M \in \Sigma_n$ et $\|M\|_{\text{op}} = n$.

   Il y a donc égalité dans les inégalités ci-dessus. On en déduit que pour tout (i,j) dans $[\![1,n]\!]$, $M_{i,j}^2 = 1$ et donc $M_{i,j} = \pm 1$.

   De plus d'après la question 6), $\mathrm{rg}(M) \leqslant 1$ donc $\mathrm{rg}(M) = 1$ car M ne peut pas être la matrice nulle.

   Réciproquement, par les calculs ci-dessus, toute matrice M de rang 1 dont tous les coefficients valent 1 ou -1 appartient à Σ_n et $\|M\|_{\text{op}} = n$.

   Soit M une matrice de rang 1 dont tous les coefficients valent 1 ou -1. On note $C_1, \dots C_n$ les colonnes de M. On pose $\alpha_1 = M_{1,1}, \dots, \alpha_n = M_{n,1}$ les coefficients de C_1. On a $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \{\pm 1\}^n$. Comme M est de rang 1, toute les colonnes de M sont colinéaires à cette première colonne. Pour tout $j \in [\![2,n]\!]$, il existe donc β_j tel que $C_j = \beta_j C_1$. Comme tous les coefficients de M valent 1 ou -1, pour tout $j \in [\![2,n]\!]$, $\beta_j \in \{\pm 1\}$. Par convention on pose de plus $\beta_1 = 1$. On en déduit que pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $M_{i,j} = \alpha_i \beta_j$.

   Finalement,

   $$\boxed{\begin{array}{c}\text{Les matrices } M \text{ de } \Sigma_n \text{ telles que } \|M\|_{\text{op}} = n \text{ sont les matrices de la forme} \\ M = (\alpha_i\beta_j)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n n(\mathbb{R}) \text{ où } \beta_1 = 1 \text{ et } \beta_2, \dots, \beta_n, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \{-1, 1\}\end{array}}$$

   On en déduit qu'il y a exactement $\boxed{2^{2n-1} \text{ matrices } M \text{ de } \Sigma_n \text{ telles que } \|M\|_{\text{op}} = n}$

B. Variables aléatoires sous-gaussiennes

8. Soit $t \in \mathbb{R}$. D'après le cours, $\mathrm{ch}(t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!}$.

   De plus

   $$e^{\frac{t^2}{2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{2^n \times n!}$$

   or par récurrence immédiate, on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < 2^n \times n! \leqslant (2n)!$ et on a aussi $\forall n \in \mathbb{N}$, $t^{2n} \geqslant 0$ donc

   $$\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{t^{2n}}{(2n)!} \leqslant \frac{t^{2n}}{2^n \times n!}$$

   ce qui permet de conclure que $\boxed{\mathrm{ch}(t) \leqslant \exp\left(\frac{t^2}{2}\right)}$

9. Soit $t \in \mathbb{R}$ et $x \in [-1,1]$. On a $\frac{1+x}{2} \geqslant 0$ et $\frac{1-x}{2} \geqslant 0$ et $\frac{1+x}{2} + \frac{1-x}{2} = 1$

   La fonction exp étant convexe sur $\mathbb{R}$ car de classe $\mathscr{C}^2$ et $\exp'' \geqslant 0$.

   On a t et $-t \in \mathbb{R}$, donc $\exp\left(\frac{1+x}{2}t + \frac{1-x}{2}(-t)\right) \leqslant \frac{1+x}{2}\exp(t) + \frac{1-x}{2}\exp(-t)$

   d'où $\boxed{\exp(tx) \leqslant \frac{1+x}{2}\exp(t) + \frac{1-x}{2}\exp(-t)}$.

10. Soit $t \in \mathbb{R}$. Comme X est à valeurs dans $[-1,1]$, $0 \leqslant \exp(tX) \leqslant e^t\frac{1+X}{2} + e^{-t}\frac{1-X}{2}$.

De plus, dans $[0,+\infty]$, en utilisant la linéarité et le fait que X soit centrée,

$$E\left(e^t\frac{1+X}{2}+e^{-t}\frac{1-X}{2}\right)=\frac{e^t(E(1)+E(X))+e^{-t}(E(1)-E(X))}{2}=\text{ch}(t)$$

Ainsi $e^t\frac{1+X}{2}+e^{-t}\frac{1-X}{2}$ est d'espérance finie et il en est de même pour $\exp(tX)$ et $E(\exp(tX))\leqslant \text{ch}(t)$
Ayant également $\text{ch}(t)\leqslant e^{t^2/2}$ selon **8**, on obtient $E(e^{tX})\leqslant e^{t^2/2}$ pour tout $t\in\mathbb{R}$
ce qui donne : $\boxed{X \text{ est 1-sous-gaussienne}}$
Supposons maintenant que $|X|\leqslant\alpha$. Posons $Y=\frac{1}{\alpha}X$.
Alors Y est centrée (linéarité de l'espérance) et $|Y|\leqslant 1$.
Soit $t\in\mathbb{R}$. Alors $\alpha\times t\in\mathbb{R}$ et d'après ce qui précède, $E(e^{\alpha tY})\leqslant\exp((\alpha t)^2/2)$, ainsi $E(e^{tX})\leqslant e^{\alpha^2t^2/2}$
donc $\boxed{\text{si } |X|\leqslant\alpha \text{ alors elle est } \alpha\text{-sous-gaussienne}}$

11. Soit $t\in\mathbb{R}$. L'indépendance des variables aléatoires $X_1,\dots,X_n$ implique l'indépendance des variables aléatoires $e^{t\mu_1X_1},\dots,e^{t\mu_nX_n}$ par le lemme des coalitions, or elles sont d'espérances finies. Ainsi on a l'existence des membres et l'égalité :

$$E\left(\exp\left(t\sum_{i=1}^n\mu_iX_i\right)\right)=E\left(\prod_{i=1}^n\exp(t\mu_iX_i)\right)=\prod_{i=1}^nE(\exp(t\mu_iX_i)).$$

Or, pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, on a $0\leqslant E(\exp(t\mu_iX_i))\leqslant\exp(t^2\mu_i^2\alpha^2/2)$. Donc par produit :

$$E\left(\exp\left(t\sum_{i=1}^n\mu_iX_i\right)\right)\leqslant\prod_{i=1}^n\exp(t^2\mu_i^2\alpha^2/2)=\exp\left(\sum_{i=1}^nt^2\mu_i^2\alpha^2\right)=\exp\left(\alpha^2\frac{t^2}{2}\right)$$

donc on a bien $\boxed{\sum_{i=1}^n\mu_iX_i \text{ est } \alpha\text{-sous-gaussienne}}$.

12. Soit $t>0$.
La variable aléatoire $\exp(tX)$ est à valeurs positives et d'espérance finie car X est sous-gaussienne
Alors l'inégalité de Markov nous donne :

$$\frac{E\left(\exp(tX)\right)}{\exp(t\lambda)}\geqslant P\big(\exp(tX)\geqslant\exp(t\lambda)\big)$$

comme on a $E\left(\exp(tX)\right)\leqslant\exp\left(\alpha^2t^2/2\right)$ car X est α-sous-gaussienne et
l'égalité des événements : $(\exp(tX)\geqslant\exp(t\lambda))=(X\geqslant\lambda)$ car $x\mapsto\exp(tx)$ est strictement croissante
Ainsi $\boxed{P(e^{tX}\geqslant e^{t\lambda})\leqslant\exp\left(\alpha^2t^2/2-t\lambda\right)}$
En choisissant $t=\frac{\lambda}{\alpha^2}$ (qui est bien un réel strictement positif et qui est le minimum de $t\mapsto\alpha^2t^2/2-t\lambda$) dans l'inégalité précédente, on obtient :

$$P(X\geqslant\lambda)\leqslant\exp\left(\frac{-\lambda^2}{2\alpha^2}\right).$$

Selon **Q11**, comme $(-1)^2=1$, alors $-X$ est une variable aléatoire α-sous-gaussienne car X l'est.
En effet, si $t\in\mathbb{R}$, alors $-t\in\mathbb{R}$, donc $E(\exp(-tX))\leqslant\exp(\alpha^2(-t)^2/2)$, ce qui donne :

$$E(\exp(t(-X)))\leqslant\exp(\alpha^2t^2/2).$$

Ainsi, d'après ce qui précède, $P(-X \geqslant \lambda) \leqslant \exp(-\lambda^2/(2\alpha^2))$.
Enfin, l'événement $(|X| \geqslant \lambda)$ est la réunion disjointe des évènements $(X \geqslant \lambda)$ et $(-X \geqslant \lambda)$, donc la somme des deux inégalités précédemment obtenues fournit :

$$\boxed{P(|X| \geqslant \lambda) \leqslant 2\exp\left(-\frac{\lambda^2}{2\alpha^2}\right)}.$$

13. $\boxed{\Rightarrow :}$ Supposons que X est d'espérance finie.
Alors, l'inégalité $0 \leqslant \lfloor X \rfloor \leqslant X$ assure que $\lfloor X \rfloor$ est aussi d'espérance finie, et à valeurs dans $\mathbb{N}$. D'après le résultat rappelé, la série $\sum\limits_{k\geqslant 1} P(\lfloor X \rfloor \geqslant k)$ converge, et est de somme $E(\lfloor X \rfloor)$.
Or, pour tout entier naturel k et par définition de la partie entière, l'événement $(\lfloor X \rfloor \geqslant k)$ est exactement l'événement $(X \geqslant k)$.
Donc $P(X \geqslant k) = P(\lfloor X \rfloor \geqslant k)$ ce qui assure la convergence de la série $\sum\limits_{k\geqslant 1} P(X \geqslant k)$
et donne également : $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} P(X \geqslant k) = E(\lfloor X \rfloor)$.
L'inégalité $\lfloor X \rfloor \leqslant X \leqslant \lfloor X \rfloor + 1$, et la croissance et la linéarité de l'espérance fournissent alors l'inégalité souhaitée, en remarquant que $E(1) = 1$:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} P(X \geqslant k) \leqslant E(X) \leqslant 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} P(X \geqslant k)$$

$\boxed{\Leftarrow :}$ Supposons que la série $\sum\limits_{k=1} P(X \geqslant k)$ converge.
Alors, ayant $P(\lfloor X \rfloor \geqslant k) = P(X \geqslant k)$ pour tout k entier et $\lfloor X \rfloor$ à valeur dans $\mathbb{N}$, la variable aléatoire $\lfloor X \rfloor$ est d'espérance finie donc $\lfloor X \rfloor + 1$ également par linéarité. Comme $0 \leqslant X \leqslant \lfloor X \rfloor + 1$, on en déduit que X est d'espérance finie.

14. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Par stricte croissance de la fonction $t \in [1, +\infty[\mapsto \sqrt{\frac{2\ln(t)}{\beta^2}} \in [0, +\infty[$, on a l'égalité des evénements : $\left(\exp(\beta^2 X^2/2) \geqslant k\right) = \left(|X| \geqslant \sqrt{\frac{2\ln(k)}{\beta^2}}\right)$
Si $k \geqslant 2$, alors $\sqrt{\frac{2\ln(k)}{\beta^2}} > 0$ ce qui permet d'appliquer l'inégalité de la question **12** :

$$P\left(\exp\left(\frac{\beta^2 X^2}{2}\right) \geqslant k\right) \leqslant 2\exp\left(-\frac{1}{2\alpha^2} \times \frac{2\ln(k)}{\beta^2}\right) = 2k^{-\eta},$$

car $\eta = \alpha^{-2}\beta^{-2}$.
Si $k = 1$, l'inégalité est vraie car $P\left(\exp\left(\frac{\beta^2 X^2}{2}\right) \geqslant k\right) \leqslant 2$
dans tous les cas $\boxed{P\left(\exp\left(\frac{\beta^2 X^2}{2}\right) \geqslant k\right) \leqslant 2k^{-\eta}}$
En supposant $0 < \alpha\beta < 1$, on a alors $1 < (\alpha\beta)^{-2} = \eta$ par stricte décroissance de $u \mapsto u^{-2}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ d'où la convergence de la série $\sum\limits_{k\geqslant 1} \frac{1}{k^\eta}$. comme on a $0 \leqslant P\left(\exp\left(\frac{\beta^2 X^2}{2}\right) \geqslant k\right) \leqslant \frac{2}{k^\eta}$
alors la série $\sum\limits_{k\geqslant 1} P\left(\exp\left(\frac{\beta^2 X^2}{2}\right) \geqslant k\right)$ converge par comparaison entre séries à termes positifs
D'après la question précédente, $\boxed{\exp\left(\frac{\beta^2 X^2}{2}\right) \text{ est donc d'espérance finie}}$ et :

$$E\left(\exp\left(\frac{\beta^2 X^2}{2}\right)\right) \leqslant 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} P\left(\exp\left(\frac{\beta^2 X^2}{2}\right) \geqslant k\right) \leqslant 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2}{k^\eta}$$

On a bien $\boxed{E\left(\exp\left(\frac{\beta^2X^2}{2}\right)\right)\leqslant 1+2\zeta(\eta)}$.

C. Recouvrements de la sphère

15. Par l'absurde, on suppose qu'il n'existe pas de sous ensemble fini A de K tel que : $K\subset\bigcup\limits_{a\in A}B_{a,\frac{\varepsilon}{2}}$.

On va construire par récurrence une suite $(a_k)_{k\geqslant 0}\in K^{\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall m,p\in\mathbb{N},\ m\neq p\Longrightarrow\|a_m-a_p\|>\frac{\varepsilon}{2}$$

— Initialisation : On considère $a_0\in K$ car $K\neq\emptyset$.
— Hérédité : Soit $n\in\mathbb{N}$. On suppose avoir construit une suite finie $(a_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ telle que

$$\forall m,p\in[\![0,n]\!],\ m\neq p\Longrightarrow\|a_m-a_p\|>\frac{\varepsilon}{2}$$

Comme l'ensemble $\{a_k;0\leqslant k\leqslant n\}$ est fini, on a $K\not\subset\bigcup\limits_{k=0}^{n}B_{a_k,\varepsilon/2}$. On peut donc choisir un élément a_{n+1} tel que $a_{n+1}\in K\setminus\left(\bigcup\limits_{k=0}^{n}B_{a_k,\varepsilon/2}\right)$.
Alors $\forall m,p\in[\![0,n+1]\!],\ m\neq p\Longrightarrow\|a_m-a_p\|>\frac{\varepsilon}{2}$.
— Conclusion : On a construit une suite à valeurs dans K ayant la propriété voulue.

Comme K est compact, il existe une sous-suite $(a_{\varphi(n)})$ de (a_n) qui soit convergente.
Ainsi la suite $\left(\|a_{\varphi(n+1)}-a_{\varphi(n)}\|\right)_{n\geqslant 0}$ converge vers 0 or $\forall n\in\mathbb{N},\ \|a_{\varphi(n+1)}-a_{\varphi(n)}\|>\frac{\varepsilon}{2}$
donc $\varepsilon=0$ ce qui est absurde !

$\boxed{\text{il existe un sous ensemble fini } A \text{ de } K \text{ tel que : } K\subset\bigcup\limits_{a\in A}B_{a,\frac{\varepsilon}{2}}}$

16. On considère un sous ensemble fini A de K tel que : $K\subset\bigcup\limits_{a\in A}B_{a,\frac{\varepsilon}{2}}$.

Comme les boules $B(a,\varepsilon/2)$ recouvrent K quand a décrit A, chaque élément x de Λ est dans au moins une des boules. On peut ainsi construire une application $f\ :\ \Lambda\longrightarrow A$ telle que $\forall x\in\Lambda,\ x\in B_{f(x),\frac{\varepsilon}{2}}$.
Soit $x,y\in\Lambda$ tels que $x\neq y$. On a donc $\|x-y\|>\varepsilon$ ainsi $y\notin B_{f(x),\frac{\varepsilon}{2}}$ car $x\in B_{f(x),\frac{\varepsilon}{2}}$. On en déduit que $f(x)\neq f(y)$
On vient de montrer que l'application $f:\Lambda\longrightarrow A$ est injective or A est fini
donc $\boxed{\Lambda \text{ est fini et } \mathrm{Card}(\Lambda)\leqslant\mathrm{Card}(A)}$.
Soit une telle partie Λ de K ayant un cardinal maximal.
Par l'absurde si on avait $K\not\subset\bigcup\limits_{a\in\Lambda}B_{a,\varepsilon}$, ceci nous fournirait $a\in K\setminus\left(\bigcup\limits_{a\in\Lambda}B_{a,\varepsilon}\right)$
Ainsi $\Lambda\cup\{a\}\subset K$ et $\forall x,y\in\Lambda\cup\{a\},\ x\neq y\Rightarrow\|x-y\|>\varepsilon$ et $\mathrm{Card}(\Lambda)<\mathrm{Card}\left(\Lambda\cup\{a\}\right)$
Absurde avec le caractère maximal du cardinal de Λ
Ainsi $\boxed{\text{Si } \Lambda \text{ est de cardinal maximal alors } K\subset\bigcup\limits_{a\in\Lambda}B_{a,\varepsilon}}$

17. Soit $a \in \Lambda$. Soit $x \in B_{a,\varepsilon/2}$. Comme $a \in S^{n-1}$, on a par l'inégalité triangulaire :

$$\|x\| \leqslant \|x-a\| + \|a\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + 1,$$

Ainsi $\boxed{B_{a,\varepsilon/2} \subset B_{0,1+\varepsilon/2}}$.
Par ailleurs, donnons-nous $a \neq b$ dans Λ et supposons qu'il existe un $x \in B_{a,\varepsilon/2} \cap B_{b,\varepsilon/2}$. Alors par l'inégalité triangulaire on aurait :

$$\|b-a\| \leqslant \|b-x\| + \|x-a\| \leqslant \varepsilon,$$

ce qui est absurde. Donc les $B_{a,\varepsilon/2}$ sont deux à deux disjointes pour $a \in \Lambda$. Puisque Λ est fini, on peut écrire :

$$\mu\left(B_{0,1+\varepsilon/2}\right) \geqslant \mu\left(\bigcup_{a\in\Lambda} B_{a,\varepsilon/2}\right) = \sum_{a\in\Lambda} \mu\left(B_{a,\varepsilon/2}\right).$$

On en déduit : $\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)^n \geqslant \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^n \times \mathrm{Card}\Lambda$ ainsi $\boxed{\mathrm{Card}\Lambda \leqslant \left(\frac{2+\varepsilon}{\varepsilon}\right)^n}$.

18. Pour utiliser **Q16**, on a besoin de l'existence d'un Λ de cardinal maximal.
On considère alors $\Gamma = \{\mathrm{Card}\,(\Lambda)\,, \Lambda$ fini et $\Lambda \subset S^{n-1}$ et $\left(\forall x, y \in \Lambda,\ x \neq y \Rightarrow \|x-y\| > \dfrac{1}{2}\right)\}$
Γ est une partie de $\mathbb{N}$ non vide, car $0 \in \Gamma$ et majorée par $\left(\frac{2+\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}\right)^n = 5^n$ avec la question précédente en $\varepsilon = \frac{1}{2}$
Ainsi Γ admet un plus grand élément M
il existe alors Λ_n partie de cardinal M du compact S^{n-1} telle que $\forall x, y \in \Lambda_n,\ x \neq y \Rightarrow \|x-y\| > \dfrac{1}{2}$
donc Λ_n est de cardinal maximal en appliquant **Q16**, au compact $K = S^{n-1}$.
On obtient $\boxed{\text{une partie } \Lambda_n \text{ de } S^{n-1} \text{ de cardinal majorée } 5^n \text{ telle que } S^{n-1} \subset \bigcup_{a\in\Lambda_n} B_{a,\frac{1}{2}}}$.

D. Norme d'une matrice aléatoire

19. Soit $i \in [\![1,n]\!]$. On a $y_i = \sum\limits_{j=1}^{n} M_{i,j}^{(n)} x_j$, avec $\sum\limits_{j=1}^{n} x_j^2 = 1$.
De plus, les variables aléatoires $(M_{i,1}^{(n)}, \ldots, M_{i,n}^{(n)})$ sont mutuellement indépendantes, car elles forment une sous-famille d'une famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes.
La question 11 permet de conclure que $\boxed{y_i \text{ est } \alpha\text{-sous-gaussienne}}$.
L'inégalité d'Orlicz montre alors que : $\forall i \in [\![1,n]\!],\ E\left(e^{\gamma y_i^2}\right) \leqslant 5$.
L'indépendance mutuelle des $M_{i,j}^{(n)}$ fournit l'indépendance mutuelle des y_i, par le lemme des coalitions car chaque y_i s'écrit comme combinaison linéaire des $M_{i,j}^{(n)}$, et les différentes combinaisons linéaires ont des supports deux à deux disjoints.
Par produit on obtient :

$$E\left(e^{\gamma\|y\|^2}\right) = E\left(\prod_{i=1}^{n} e^{\gamma y_i^2}\right) \leqslant 5^n$$

Soit maintenant $r > 0$. Par stricte croissance de l'exponentielle et stricte positivité de γ on a :

$$P(\|y\| \geqslant r\sqrt{n}) = P\left(e^{\gamma\|y\|^2} \geqslant e^{\gamma r^2 n}\right).$$

Puis en utilisant l'inégalité de Markov il vient : $\boxed{P\big(\|y\| \geqslant r\sqrt{n}\big) \leqslant (5e^{-\gamma r^2})^n}$.

20. Soit $r > 0$ tel que $\|M^{(n)}\|_{\text{op}} \geqslant 2r\sqrt{n}$.
La question 1) nous fournit $t \in S^{n-1}$ tel que : $\|M^{(n)}t\| = \|M^{(n)}\|_{\text{op}}$
La question 18) nous fournit $a \in \Lambda_n$ tel que : $t \in B_{a,1/2}$.
Par la question 2), on a :

$$\|M^{(n)}\|_{\text{op}} \leqslant \|M^{(n)}t - M^{(n)}a\| + \|M^{(n)}a\| \leqslant \frac{1}{2}\|M^{(n)}\|_{\text{op}} + \|M^{(n)}a\|,$$

Ainsi $\|M^{(n)}a\| \geqslant \frac{1}{2}\|M^{(n)}\|_{\text{op}}$.
On a montré que : $\boxed{\|M^{(n)}\|_{\text{op}} \geqslant 2r\sqrt{n} \text{ implique l'existence d'un } a \in \Lambda_n \text{ tel que } \|M^{(n)}a\| \geqslant r\sqrt{n}}$.
Comme on a l'inclusion des événements :

$$\big(\|M^{(n)}\|_{\text{op}} \geqslant 2r\sqrt{n}\big) \subset \bigcup_{a \in \Lambda_n} \big(\|M^{(n)}a\| \geqslant r\sqrt{n}\big)$$

et comme Λ_n est fini, on obtient :

$$\begin{aligned}
P(\|M^{(n)}\|_{\text{op}} \geqslant 2r\sqrt{n}) &\leqslant \sum_{a \in \Lambda_n} P\left(\|M^{(n)}a\| \geqslant r\sqrt{n}\right) \\
&\leqslant \sum_{a \in \Lambda_n} \left(5e^{-\gamma r^2}\right)^n \qquad \text{d'après 19} \\
&= \left(5e^{-\gamma r^2}\right)^n \times \text{Card}\Lambda_n \\
P(\|M^{(n)}\|_{\text{op}} &\leqslant \left(25e^{-\gamma r^2}\right)^n \qquad \text{d'après 18.}
\end{aligned}$$