

Norme d'une matrice aléatoire

L'objectif de ce problème est d'étudier une inégalité de concentration pour la norme opérationnelle d'une matrice aléatoire dont les coefficients sont mutuellement indépendants et « uniformément sous-gaussiens ».

Soit n un entier strictement positif. On identifie \mathbb{R}^n à l'espace $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ des vecteurs colonnes à n coordonnées réelles. Pour tout $x = (x_1, \dots, x_n)^\top$ dans \mathbb{R}^n , on note :

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{1 \leq i \leq n} x_i^2}.$$

La sphère unité de \mathbb{R}^n est notée $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x\| = 1\}$. On identifie une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à l'endomorphisme de \mathbb{R}^n canoniquement associé et on note $\sigma(M)$ l'ensemble de ses valeurs propres réelles.

Les parties A, B et C sont mutuellement indépendantes.

A. Norme d'opérateur d'une matrice

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- 1) Montrer que S^{n-1} est un compact de \mathbb{R}^n et en déduire l'existence de :

$$\|M\|_{\text{op}} = \max\{\|Mx\|; x \in S^{n-1}\}.$$

On rappelle que l'application $\|\cdot\|_{\text{op}}$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- 2) Redémontrer que pour tous x et y dans \mathbb{R}^n , on a l'inégalité : $\|Mx - My\| \leq \|M\|_{\text{op}} \|x - y\|$.
- 3) Si M est symétrique, établir l'égalité $\|M\|_{\text{op}} = \max\{|\lambda|; \lambda \in \sigma(M)\}$. On pourra commencer par le cas où M est diagonale puis utiliser le théorème spectral.

On note J_n la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.

- 4) Déterminer les valeurs propres et les espaces propres de J_n en précisant la dimension des espaces propres. En déduire la valeur de $\|J_n\|_{\text{op}}$.

Soit $M = (M_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- 5) Démontrer l'inégalité $\|M\|_{\text{op}} \geq \max\{|M_{i,j}|; 1 \leq i, j \leq n\}$.
- 6) Établir que :

$$\|M\|_{\text{op}} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (M_{i,j})^2}$$

et donner une condition nécessaire et suffisante sur le rang de M pour que cette inégalité soit une égalité.

On note Σ_n l'ensemble des matrices $M = (M_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $|M_{i,j}| \leq 1$ pour tous $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

- 7) Montrer que pour tout $M \in \Sigma_n$, $\|M\|_{\text{op}} \leq n$. Caractériser et dénombrer les matrices M de Σ_n pour lesquelles $\|M\|_{\text{op}} = n$.

B. Variables aléatoires sous-gaussiennes

Dans toute la suite du problème, toutes les variables aléatoires considérées sont réelles et discrètes, définies sur un espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) . Soit $\alpha > 0$, on dit qu'une variable aléatoire X est α -sous-gaussienne si :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad E(\exp(tX)) \leq \exp\left(\frac{\alpha^2 t^2}{2}\right)$$

On rappelle la notation : $\text{ch}(t) = \frac{\exp(t) + \exp(-t)}{2}$

8) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $\text{ch}(t) \leq \exp\left(\frac{t^2}{2}\right)$.

On pourra utiliser le développement de la fonction ch en série entière sur \mathbb{R} .

9) Soit $t \in \mathbb{R}$. Démontrer que si $x \in [-1, 1]$, on a l'inégalité de convexité :

$$\exp(tx) \leq \frac{1+x}{2} \exp(t) + \frac{1-x}{2} \exp(-t).$$

10) Soit X une variable aléatoire réelle centrée.

On suppose que $|X|$ est majorée par 1. Montrer que X est 1-sous-gaussienne.

En déduire que si $|X|$ est majorée par $\alpha > 0$ alors elle est α -sous-gaussienne.

11) Soit X_1, \dots, X_n des variables aléatoires mutuellement indépendantes et α -sous-gaussiennes, et $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ des nombres réels tels que $\sum_{i=1}^n (\mu_i)^2 = 1$.

Montrer que la variable aléatoire $\sum_{i=1}^n \mu_i X_i$ est aussi α -sous-gaussienne.

12) Soit X une variable aléatoire α -sous-gaussienne et $\lambda > 0$. Montrer que pour tout $t > 0$:

$$P(X \geq \lambda) \leq \exp\left(\frac{\alpha^2 t^2}{2} - t\lambda\right).$$

En déduire que :

$$P(|X| \geq \lambda) \leq 2 \exp\left(-\frac{\lambda^2}{2\alpha^2}\right).$$

On rappelle qu'une variable aléatoire X à valeurs dans \mathbb{N} est d'espérance finie si et seulement si la série $\sum P(X \geq k)$ converge et que dans ce cas :

$$E(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X \geq k).$$

13) Si X est une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{R}^+ , montrer que X est d'espérance finie si et seulement si la série de terme général $P(X \geq k)$ converge et que dans ce cas :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} P(X \geq k) \leq E(X) \leq 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} P(X \geq k)$$

On pourra pour cela considérer la partie entière $[X]$.

Pour tout $s \in]1, +\infty[$, on note $\zeta(s) = \sum_{k=1}^{+\infty} k^{-s}$.

14) Soit X une variable aléatoire α -sous-gaussienne et $\beta > 0$. Montrer que pour tout entier $k > 0$:

$$P\left(\exp\left(\frac{\beta^2 X^2}{2}\right) \geq k\right) \leq 2k^{-\eta}$$

où on a posé $\eta = \alpha^{-2}\beta^{-2}$. En déduire que si $\alpha\beta < 1$, la variable aléatoire $\exp(\frac{\beta^2 X^2}{2})$ est d'espérance finie majorée par $1 + 2\zeta(\eta)$.

En particulier, en prenant $\alpha\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et en utilisant l'inégalité $1 + 2\zeta(2) \leq 5$ (que l'on ne demande pas de justifier), on obtient immédiatement, et on l'admet, que si X est une variable aléatoire α -sous-gaussienne, on a l'inégalité d'Orlicz :

$$E\left(\exp\left(\frac{X^2}{4\alpha^2}\right)\right) \leq 5.$$

C. Recouvrements de la sphère

Si $a \in \mathbb{R}^n$, on note $B_{a,r} = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x - a\| \leq r\}$ la boule fermée de centre a et de rayon r . Soit K une partie compacte non vide de \mathbb{R}^n , et soit $\varepsilon > 0$.

15) Montrer que l'on peut trouver un sous ensemble fini A de K tel que :

$$K \subset \bigcup_{a \in A} B_{a, \frac{\varepsilon}{2}}.$$

On pourra raisonner par l'absurde en utilisant le théorème de Bolzano-Weierstrass.

16) Soit Λ un sous ensemble de K tel que pour tous x, y distincts dans Λ , $\|x - y\| > \varepsilon$. Montrer que Λ est fini et que son cardinal est majoré par celui d'un ensemble A du type considéré à la question précédente. Si de plus Λ est de cardinal maximal, montrer que :

$$K \subset \bigcup_{a \in \Lambda} B_{a, \varepsilon}$$

On admet l'existence d'une fonction μ , appelée *volume*, définie sur l'ensemble des parties compactes de \mathbb{R}^n et vérifiant les propriétés suivantes.

- (i) Pour tout vecteur a de \mathbb{R}^n et tout nombre réel $r > 0$, $\mu(B_{a,r}) = r^n$.
- (ii) Pour toute famille K_1, \dots, K_m de compacts de \mathbb{R}^n deux à deux disjoints on a :

$$\mu\left(\bigcup_{1 \leq i \leq m} K_i\right) = \sum_{i=1}^m \mu(K_i).$$

- (iii) Pour tous compacts K, K' de \mathbb{R}^n , $K \subset K'$ implique $\mu(K) \leq \mu(K')$.

Soit Λ une partie finie de S^{n-1} telle que pour tous x, y distincts dans Λ , $\|x - y\| > \varepsilon$.

17) Vérifier que les boules $B_{a, \frac{\varepsilon}{2}}$ pour $a \in \Lambda$ sont toutes contenues dans $B_{0, 1 + \frac{\varepsilon}{2}}$.

Montrer alors que le cardinal de Λ est majoré par $\left(\frac{2+\varepsilon}{\varepsilon}\right)^n$.

18) Justifier l'existence d'une partie finie Λ_n de S^{n-1} , de cardinal majoré par 5^n , et telle que :

$$S^{n-1} \subset \bigcup_{a \in \Lambda_n} B_{a, \frac{1}{2}}.$$

D. Norme d'une matrice aléatoire

On fixe un nombre réel $\alpha > 0$ et on pose $\gamma = \frac{1}{4\alpha^2}$.

Soit n un entier strictement positif. On définit une famille de variables aléatoires réelles $M_{i,j}^{(n)}$ indexées par $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, mutuellement indépendantes et α -sous-gaussiennes. On note $M^{(n)}$ la matrice aléatoire $(M_{i,j}^{(n)})_{1 \leq i, j \leq n}$.

Si $x \in S^{n-1}$, on note $y = M^{(n)}x$ qui est ainsi un vecteur aléatoire dont les composantes y_1, \dots, y_n sont des variables aléatoires réelles.

- 19)** Montrer que pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, la variable aléatoire y_i est α -sous-gaussienne. En déduire que : $E(\exp(\gamma \|y\|^2)) \leq 5^n$ et que pour tout réel $r > 0$:

$$P(\|y\| \geq r\sqrt{n}) \leq (5e^{-\gamma r^2})^n.$$

- 20)** Soit Λ_n une partie de S^{n-1} vérifiant les conditions de la question **18)**. Pour tout réel $r > 0$, montrer que $\|M^{(n)}\|_{\text{op}} \geq 2r\sqrt{n}$ implique l'existence d'un $a \in \Lambda_n$ tel que : $\|M^{(n)}a\| \geq r\sqrt{n}$. En déduire que

$$P(\|M^{(n)}\|_{\text{op}} \geq 2r\sqrt{n}) \leq (25e^{-\gamma r^2})^n.$$

FIN DU PROBLÈME