I. Oscillations d'un certain système linéaire

1. Comme A appartient à S_n^{++}, son spectre est inclus dans $\mathbb{R}_+^*$ donc ne contient pas 0.
Donc $\boxed{A - 0.I_n \text{ est inversible}}$.
2. $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1} = A^{-1}$ donc A^{-1} est symétrique.
3. $(.\,;.)_A : (x, y) \mapsto x^T Ay$ est
-bilinéaire par bilinéarité du produit matriciel et linéarité de la transposition,
-symétrique car $\forall (x, y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, comme la matrice $x^T Ay$ est de format $(1, 1)$ donc symétrique,
$$x^T Ay = (x^T Ay)^T = y^T A^T x = y^T Ax$$
car A est symétrique.
-définie positive car A est définie positive.
Donc c'est un $\boxed{\text{produit scalaire}}$ sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}\forall x, y \in \mathbb{R}^n, (u(x); y)_A &= (A^{-1}Kx)^T Ay = x^T K^T (A^{-1})^T Ay \\ &= = x^T KA^{-1}Ay \quad \text{car } A^{-1} \text{ et } K \text{ sont symétriques} \\ &= x^T Ky = x^T AA^{-1}Ky = \boxed{(x; u(y))_A}\end{aligned}$$

4. Par la question précédente, l'endomorphisme u est $\boxed{\text{autoadjoint}}$ pour le produit scalaire $(.\,;.)_A$.
Donc, par le $\boxed{\text{théorème spectral}}$, il existe une base $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ de $\mathbb{R}^n$ orthonormale au sens de $(.;.)_A$ formée de vecteurs propres de u.
De plus u est défini positif au sens de $(.;.)_A$ car le calcul précédent montre que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $(u(x); x) = x^T Kx$ et K est définie positive.
Donc $\boxed{Sp(u) \subset \mathbb{R}_+^*}$.
Ainsi il existe n réels strictement positifs $\lambda_i \in \mathbb{R}^{+*} (1 \leqslant i \leqslant n)$ tels que
$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, u(e_i) = A^{-1}Ke_i = \lambda_i e_i$$
5. Soit $x \in \mathscr{C}^2\left([0, +\infty\,[; \mathbb{R}^n\right)$.
Pour tout $t \in [0, +\infty[$, notons $x_1(t) = e_1^*(t), \dots, x_n(t) = e_n^*(t)$ les coordonnées de $x(t)$ dans la base $(e_1, \dots, e_n)$. Les fonctions $x_1, \dots, x_n$ sont de classe $\mathcal{C}^2$ car les termes de la base duale $(e_1^*, \dots, e_n^*)$ de $(e_1, \dots, e_n)$ sont linéaires.
x est solution de (1) si et seulement si pour tout $t \geqslant 0$, $x''(t) = -u(t)$ c'est-à-dire
$$x_1''(t)e_1 + \ldots + x_n''(t)e_n = -\Big(\lambda_1 x_1(t)e_1 + \ldots + \lambda_n x_n(t)e_n\Big)$$
c'est-à-dire :
$$\begin{cases} x_1''(t) &= -\omega_1^2 x_1(t) \\ &\vdots \\ x_n''(t) &= -\omega_n^2 x_n(t) \end{cases}$$
Donc x est solution de l'équation différentielle (1) si et seulement si il existe $2n$ nombres réels $(a_i)_{1\leqslant i\leqslant n}, (b_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ tels que :

$$\forall t \in [0,+\infty[, x(t) = \sum_{i=1}^{n} \left(a_i \cos(\omega_i t) + b_i \sin(\omega_i t)\right) e_i$$

Par le raisonnement précédent, l'espace vectoriel des solutions de (1) est isomorphe, via l'application $x \mapsto (e_1^* \circ x, \ldots, e_n^* \circ x)$, au produit des espaces vectoriels des solutions de $x_1'' = -\lambda_1 x_1$, …, $x_1'' = -\lambda_n x_n$, qui sont chacun de dimension 2 d'après le cours.

Donc l'ensemble des solutions de (1) est un espace vectoriel de $\boxed{\text{dimension } 2n}$.

6. Soient $x, y \in \mathscr{C}^1([0,+\infty[;\mathbb{R}^n)$. Par bilinéarité de $\langle .;. \rangle$,

$$\forall t \in [0,+\infty[, \frac{d}{dt}(\langle Ax; y\rangle)(t) = \langle (Ax)'(t); y(t)\rangle + \langle Ax(t); y'(t)\rangle = \boxed{\langle Ax'(t); y(t)\rangle + \langle Ax(t); y'(t)\rangle}$$

car A est constante (indépendante de t).

7. Soit $x \in \mathscr{C}^2([0,+\infty[;\mathbb{R}^n)$ une solution de l'équation différentielle (1).

$$\begin{aligned}\Big((T(x)+U(x)\Big)'(t) &= \frac{1}{2}\langle Ax''(t); x'(t)\rangle + \frac{1}{2}\langle Ax'(t); x''(t)\rangle + \frac{1}{2}\langle Kx'(t); x(t)\rangle + \frac{1}{2}\langle Kx(t); x'(t)\rangle \\ &= \langle Ax''(t); x'(t)\rangle + \langle Kx(t); x'(t)\rangle \text{ car } A \text{ et } K \text{ sont symétriques} \\ &= \langle Ax''(t) + Kx(t); x'(t)\rangle \\ &= \langle 0; x'(t)\rangle = 0\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\text{la quantité } T(x)(t) + U(x)(t) \text{ ne dépend pas de } t \in [0,+\infty[}$.

II. Résultats intermédiaires.

8. En reconnaissant une dérivée exacte,

$$\int_0^{\pi} \left(\frac{1+\cos t}{2}\right)^k \sin t \, dt = \left[-\frac{1}{2^k(k+1)}(1+\cos t)^{k+1}\right]_0^{\pi} = \frac{2}{k+1}$$

Par le changement de variable $t = 2\pi - \theta$,

$$\int_{\pi}^{2\pi} \left(\frac{1+\cos t}{2}\right)^k dt = \int_{\pi}^{0} \left(\frac{1+\cos(2\pi-\theta)}{2}\right)^k (-d\theta) = \int_0^{\pi} \left(\frac{1+\cos\theta}{2}\right)^k d\theta$$

par parité et 2π-périodicité de cos.

D'où

$$\int_0^{2\pi} \left(\frac{1+\cos t}{2}\right)^k dt = 2\int_0^{\pi} \left(\frac{1+\cos t}{2}\right)^k dt \geqslant 2\int_0^{\pi} \left(\frac{1+\cos t}{2}\right)^k \sin t \, dt = \frac{4}{k+1} > 0$$

car $1 + \cos \geqslant 0$ et $\sin \leqslant 1$.

Donc $\boxed{c_k \text{ est bien défini et } c_k \leqslant \frac{k+1}{4}}$.

9. Soit $\varepsilon \in]0,\pi[$.

Comme $1 + \cos$ est positive, décroissante sur $[0,\pi]$ et invariante par composition à droite par $t \mapsto 2\pi - t$, on a

$$0 \leqslant \delta_k(\varepsilon) = R_k(\varepsilon) \leqslant \frac{k+1}{4}\left(\frac{1+\cos\varepsilon}{2}\right)^k$$

Or $0 \leqslant \frac{1+\cos\varepsilon}{2} < 1$ donc $\left(\frac{1+\cos\varepsilon}{2}\right)^k = o_{k\to\infty}(1/k) = o_{k\to\infty}(1/(k+1))$ et ainsi par encadrement

$$\boxed{\delta_k(\varepsilon) \underset{k\to\infty}{\to} 0}$$

10. a) Soit $g \in \mathscr{C}_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C})$.
g étant continue, sa restriction au segment $[0, 2\pi]$ est bornée.
De plus, pour tout réel t, notant $n = \lfloor \frac{t}{2\pi} \rfloor$, on a $n \leqslant \frac{t}{2\pi} < n+1$ donc $0 \leqslant t - 2n\pi < 2\pi$ et ainsi, puisque g est 2π-périodique,

$$|g(t)| = |g(t-2n\pi)| \leqslant ||g||_{\infty,[0,2\pi]}$$

.
Donc $\boxed{g \text{ est bornée}}$ (et $||g|| = ||g||_{\infty,[0,2\pi]}$).

b) Soit $\varepsilon \in]0, \pi[$, et $k \in \mathbb{N}$. Soit $h \in \mathscr{C}_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C})$ qui est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Soit u un réel.
Par le changement de variable $t = u - t_1$,

$$\int_0^{2\pi} R_k(u-t)h(t)dt = \int_u^{u-2\pi} R_k(t_1)\, h(u-t_1)\,(-dt_1) = \int_{u-2\pi}^{u} R_k(t_1)\, h(u-t_1)\, dt_1$$

D'après un théorème de MPSI, l'intégrale d'une fonction périodique continue par morceaux sur "un intervalle de période" ne dépend pas de cet intervalle. Comme $t_1 \mapsto R_k(t_1)h(u-t_1)$ est continue et 2π-périodique,

$$\boxed{\int_0^{2\pi} R_k(u-t)h(t)dt = \int_0^{2\pi} R_k(t_1)\, h(u-t_1)\, dt_1}$$

Par l'égalité précédente et la relation $\displaystyle\int_0^{2\pi} R_k(t_1)\, dt_1 = 1$,

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^{2\pi} R_k(u-t)h(t)dt - h(u)\right| &= \left|\int_0^{2\pi} R_k(t_1)\, h(u-t_1)\, dt_1 - h(u)\int_0^{2\pi} R_k(t_1)dt_1\right| \\
&= \left|\int_0^{2\pi} R_k(t_1)\,(h(u-t_1) - h(u))dt_1\right| \\
&\leqslant \int_0^{2\pi} R_k(t_1)\left|h(u-t_1) - h(u)\right|dt_1,
\end{aligned}$$

cette dernière inégalité étant obtrenue par inégalité triangulaire intégrale et positivité de R_k.
Par croissance l'intégrale et en majorant $\left|h(u-t_1) - h(u)\right|$ par $\left|h(u-t_1)\right| + \left|h(u)\right|$,

$$\int_\varepsilon^{2\pi-\varepsilon} R_k(t_1)\left|h(u-t_1) - h(u)\right|dt_1 \leqslant (2\pi - 2\varepsilon)\delta_k(\varepsilon)2||h|| \leqslant 4\pi||h||\delta_k(\varepsilon)$$

Par inégalité des accroissements finis, on peut également majorer $\left|h(u-t_1) - h(u)\right|$ par $|t_1|.||h'||$ et on obtient :

$$\begin{aligned}\int_0^{\varepsilon} R_k(t_1)\left|h(u-t_1)-h(u)\right|dt_1 &\leqslant \int_0^{\varepsilon} R_k(t_1)\,||h'||.|t_1|\,dt_1\\ &\leqslant \int_0^{\varepsilon} R_k(t_1)\,||h'||.\varepsilon\,dt_1\\ &\leqslant \int_0^{2\pi} R_k(t_1)\,||h'||.\varepsilon\,dt_1\\ &= \epsilon||h'||\end{aligned}$$

Enfin,

$$\begin{aligned}\int_{2\pi-\varepsilon}^{2\pi} R_k(t_1)\left|h(u-t_1)-h(u)\right|dt_1 &= \int_{2\pi-\varepsilon}^{2\pi} R_k(t_1)\left|h(u-t_1+2\pi)-h(u)\right|dt_1\\ &\leqslant \int_{2\pi-\varepsilon}^{2\pi} R_k(t_1)\,(2\pi-t_1)||h'||\,dt_1\\ &\leqslant \int_{2\pi-\varepsilon}^{2\pi} R_k(t_1)\,\varepsilon||h'||\,dt_1\\ &\leqslant \int_0^{2\pi} R_k(t_1)\,||h'||.\varepsilon\,dt_1\\ &= \epsilon||h'||\end{aligned}$$

Donc par la relation de Chasles,

$$\boxed{\left|\int_0^{2\pi} R_k(u-t)h(t)dt-h(u)\right|\leqslant 2\,\|h'\|\,\varepsilon+4\pi\|h\|d_k(\varepsilon)}$$

III. Un théorème ergodique.

Dans toute la suite on se limite au cas $n=2$ de la partie I.

11. Soit $x\in\mathscr{C}^2\left([0,+\infty\,[;\mathbb{R}^2\right)$ une solution de l'équation (1).
D'après la question 5), on sait qu'il existe quatre réels a_1,a_2,b_1,b_2 tels que pour tout $t\in[0,+\infty[$,

$$x(t)=\sum_{i=1}^{2}(a_i\cos(\omega_i t)+b_i\sin(\omega_i t))e_i$$

où, pour $i\in\{1,2\}$, $\omega_i^2=\lambda_i$.
Soit $i\in\{1,2\}$. Si $a_i=b_i=0$, on peut poser $c_i=\varphi_i=0$. On a bien que pour tout $t\geqslant 0$,

$$a_i\cos(\omega_i t)+b_i\sin(\omega_i t)=c_i\cos(\omega_i t+\varphi_i)=0$$

Sinon, on pose $c_i=\sqrt{a_i^2+b_i^2}$ et $a_i'=\frac{a_i}{c_i}$, $b_i'=\frac{b_i}{c_i}$. On vérifie alors que $(a_i')^2+(b_i')^2=1$. Il existe donc $\varphi_i\in\mathbb{R}$ tel que $\cos(\varphi_i)=a_i'$ et $\sin(\varphi_i)=b_i'$.
Pour $t\geqslant 0$,

$$a_i\cos(\omega_i t)+b_i\sin(\omega_i t)=c_i\left(a_i'\cos(\omega_i t)+b_i'\sin(\omega_i t)\right)=c_i\cos(\omega_i t+\varphi_i)$$

Il existe bien quatre réels $c_1,c_2,\varphi_1,\varphi_2$ tels que :

$$\forall t\in[0,+\infty[,x(t)=\sum_{i=1}^{2}c_i\cos\left(\omega_i t+\varphi_i\right)e_i$$

12. Soit $f \in \mathscr{C}_{2\pi,2\pi}(\mathbb{R}^2;\mathbb{C})$.

a) On sait que $K = [0,2\pi] \times [0,2\pi]$ est un compact de $\mathbb{R}^2$ (en tant que produit de deux compacts). La fonction f étant continue, elle est bornée sur K et atteint ses bornes. On note

$$M = \sup_{(\theta_1,\theta_2)\in K} |f(\theta_1,\theta_2)| = \max_{(\theta_1,\theta_2)\in K} |f(\theta_1,\theta_2)|$$

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Montrons par récurrence que pour tout p,q dans $\mathbb{Z}^2$, $f(x+2p\pi, y+2q\pi) = f(x,y)$. On procède par récurrence sur $d = |p|+|q|$ en notant
$\mathscr{P}(d)$: « pour $(p,q) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $|p|+|q| \leqslant d$ on a $f(x+2p\pi, y+2q\pi) = f(x,y)$ ».

— Soit $d = 0$. Le prédicat $\mathscr{P}(0)$ est vérifié car si $d = 0$ alors $p = q = 0$.

— Soit $d \in \mathbb{N}$. On suppose $\mathscr{P}(d)$ et on montre $\mathscr{P}(d+1)$. Soit $(p,q) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $|p|+|q| \leqslant d+1$. Si $|p|+|q| \leqslant d$ alors $f(x+2p\pi, y+2q\pi) = f(x,y)$ par hypothèse de récurrence.
Sinon, si $p > 0$ alors

$$f(x+2p\pi, y+2q\pi) = f(x+2(p-1)\pi, y+2q\pi) \overset{HR}{=} f(x,y)$$

Si $p < 0$ alors

$$f(x+2p\pi, y+2q\pi) = f(x+2(p+1)\pi, y+2q\pi) \overset{HR}{=} f(x,y)$$

Si $p = 0$ alors, on procède de même en séparant selon que $q > 0$ ou $q < 0$.

On en déduit que pour tout (x,y) dans $\mathbb{R}^2$ et tout (p,q) dans $\mathbb{Z}^2$, $f(x+2p\pi, y+2q\pi) = f(x,y)$.
Maintenant, pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On pose $k_x = \lfloor \frac{x}{2\pi} \rfloor$ et $k_y = \lfloor \frac{y}{2\pi} \rfloor$ puis $\theta_1 = x - 2k_x\pi$, $\theta_2 = y - 2k_y\pi$.
Comme par définition, $k_x \leqslant \frac{x}{2\pi} < k_x + 1$, $\theta_1 \in [0, 2\pi[$. De même $\theta_2 \in [0,2\pi[$.
On en déduit que $(\theta_1,\theta_2) \in K$ et donc

$$|f(x,y)| = |f(\theta_1 + 2k_x\pi, \theta_2 + 2k_y\pi)| = |f(\theta_1,\theta_2)| \leqslant M$$

On a montré que f est bornée et que $(\theta_1,\theta_2) \mapsto |f(\theta_1,\theta_2)|$ atteint sa borne supérieure sur $\mathbb{R}^2$.
En particulier

$$M = \sup_{(\theta_1,\theta_2)\in K} |f(\theta_1,\theta_2)| = \sup_{(\theta_1,\theta_2)\in \mathbb{R}^2} |f(\theta_1,\theta_2)|$$

b) On commence par vérifier que, pour tout $\theta_2 \in \mathbb{R}$, $\theta_1 \mapsto f(\theta_1,\theta_2)$ est continue. On peut donc intégrer sur le segment $[0,2\pi]$. Notons

$$v : \theta_2 \mapsto \int_0^{2\pi} f(\theta_1,\theta_2)\, d\theta_1$$

On montre alors que v est continue en appliquant le théorème de continuité des intégrales à paramètres :

i) Pour tout $\theta_2 \in \mathbb{R}$, $\theta_1 \mapsto f(\theta_1,\theta_2)$ est continue (par morceaux) sur $[0,2\pi]$.

ii) Pour tout $\theta_1 \in \mathbb{R}$, $\theta_2 \mapsto f(\theta_1,\theta_2)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

iii) Domination. Pour tout $\theta_1 \in [0,2\pi]$, pour tout $\theta_2 \in \mathbb{R}$,

$$|f(\theta_1,\theta_2)| \leqslant \|f\|$$

La fonction constante $\theta_1 \mapsto \|f\|$ est intégrable sur le segment $[0,2\pi]$.

D'après le théorème de continuité des intégrales à paramètres, la fonction v est continue sur $\mathbb{R}$.

13. Soit $j, \ell \in \mathbb{Z}$. On pose $f : (\theta_1,\theta_2) \mapsto e^{i\theta_1 j} e^{i\theta_2 \ell}$

— Si $\boxed{(j,\ell)=(0,0)}$, la fonction f est la fonction constante égale à 1. Dans ce cas car pour tout $T>0$ et tout $t\in[0,T]$, $(f\circ\theta)(t)=1$ d'où

$$\boxed{\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_0^T (f\circ\theta)(t)\ dt=1}$$

De plus, pour tout $\theta_2\in\mathbb{R}$, $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(\theta_1,\theta_2)d\theta_1 d\theta_2=2\pi$ donc

$$\boxed{(2\pi)^{-2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(\theta_1,\theta_2\right)d\theta_1 d\theta_2=\frac{(2\pi)^2}{(2\pi)^2}=1}$$

Le Théorème Ergodique est vérifié.

— Si $\boxed{(j,\ell)\neq(0,0)}$.

Pour $T>0$,

$$\begin{aligned}\int_0^T (f\circ\theta)(t)dt &= \int_0^T f(\omega_1 t+\varphi_1,\omega_2 t+\varphi_2)dt\\ &= \int_0^T e^{ij(\omega_1 t+\varphi_1)}e^{i\ell(\omega_2 t+\varphi_2)}dt\\ &= e^{i(j\varphi_1+\ell\varphi_2)}\int_0^T e^{i(j\omega_1+\ell\omega_2)t}dt\end{aligned}$$

Comme $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ n'est pas rationnel, $j\omega_1+\ell\omega_2\neq 0$ d'où

$$\int_0^T e^{i(j\omega_1+\ell\omega_2)t}dt=\left[\frac{1}{i(j\omega_1+\ell\omega_2)}e^{i(j\omega_1+\ell\omega_2)t}\right]_0^T=\frac{e^{i(j\omega_1+\ell\omega_2)T}-1}{i(j\omega_1+\ell\omega_2)}$$

On en déduit que

$$\left|\frac{1}{T}\int_0^T (f\circ\theta)(t)dt\right|\leqslant\frac{2}{T|j\omega_1+\ell\omega_2|}\underset{T\to+\infty}{\longrightarrow}0$$

Cela donne

$$\boxed{\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_0^T (f\circ\theta)(t)\ dt=0}$$

D'autre part, pour tout $\theta_2\in\mathbb{R}$,

$$\int_0^{2\pi} f\left(\theta_1,\theta_2\right)d\theta_1=e^{i\theta_2\ell}\int_0^{2\pi} e^{i\theta_1 j}d\theta_1=\begin{cases}\left[\frac{1}{ij}e^{i\theta_1 j}\right]_0^{2\pi}=0 & \text{si } j\neq 0\\ 2\pi & \text{si } j=0\end{cases}$$

Donc, si $j\neq 0$, $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(\theta_1,\theta_2\right)d\theta_1 d\theta_2=0$.

Dans le cas où $j=0$, on a $\ell\neq 0$ et

$$\boxed{\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(\theta_1,\theta_2\right)d\theta_1 d\theta_2=2\pi\int_0^{2\pi} e^{i\theta_2\ell}d\theta_2=2\pi\left[\frac{1}{i\ell}e^{i\theta_2\ell}\right]_0^{2\pi}=0}$$

Le Théorème Ergodique est aussi vérifié dans ce cas.

14. Soit $k\in\mathbb{N}^*$. Pour $(u,v)\in\mathbb{R}^2$ on veut exprimer

$$f_k(u,v)=\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} R_k\left(u-\theta_1\right)R_k\left(v-\theta_2\right)f\left(\theta_1,\theta_2\right)d\theta_1 d\theta_2$$

On utilise d'abord que $\frac{1+\cos(t)}{2}=\cos^2(\frac{t}{2})$. On en déduit que

$$\begin{aligned}
R_k(u-\theta_1) &= c_k\left(\frac{1+\cos(u-\theta_1)}{2}\right)^k \\
&= c_k\cos^{2k}\left(\frac{u-\theta_1}{2}\right) \\
&= c_k\left(\frac{e^{i(u-\theta_1)/2}+e^{-i(u-\theta_1)/2}}{2}\right)^{2k} \\
&= \frac{c_k}{4^k}\sum_{j=0}^{2k}\binom{2k}{j}e^{ij(u-\theta_1)/2}e^{-i(2k-j)(u-\theta_1)/2} \\
&= \frac{c_k}{4^k}\sum_{j=0}^{2k}\binom{2k}{j}e^{i(j-k)(u-\theta_1)} \\
&= \frac{c_k}{4^k}\sum_{j=-k}^{k}\binom{2k}{j+k}e^{iju}e^{-ij\theta_1}
\end{aligned}$$

De même

$$R_k(v-\theta_2) = \frac{c_k}{4^k}\sum_{\ell=-k}^{k}\binom{2k}{k+\ell}e^{i\ell u}e^{-i\ell\theta_2}$$

On en déduit, par linéarité des intégrales, que

$$f_k(u,v) = \sum_{-k\leqslant j,\ell\leqslant k} a_{j,\ell}e^{iuj}e^{iv\ell}$$

où, pour j et ℓ dans $[\![-k,k]\!]$,

$$a_{j,\ell} = \frac{c_k^2}{16^k}\binom{2k}{j+k}\binom{2k}{\ell+k}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{-ij\theta_1}e^{-\ell\theta_2}f(\theta_1,\theta_2)d\theta_1 d\theta_2$$

On a vu à la question précédente que les fonctions de la forme $(\theta_1,\theta_2)\mapsto e^{ij\theta_1}e^{i\ell\theta_2}$ vérifiaient le Théorème Ergodique. Par linéarité, les fonctions f_k le vérifient aussi.

15. Soit $\varepsilon\in]0,\pi[$ et $k\in\mathbb{N}^*$. Soit $(u,v)\in\mathbb{R}^2$. Pour tout $\theta_2\in\mathbb{R}$, en utilisant la question 10) pour la fonction $h : t\mapsto f(t,\theta_2)$ qui est bien 2π-périodique et de classe $\mathscr{C}^1$, on a

$$\left|\int_0^{2\pi}R_k(u-\theta_1)f(\theta_1,\theta_2)d\theta_1 - f(u,\theta_2)\right| \leqslant 2\,\|h'\|\,\varepsilon + 4\pi\|h\|d_k(\varepsilon)$$

Or h' est la fonction $t\mapsto\frac{\partial f}{\partial\theta_1}(t,\theta_2)$ donc

$$\left|\int_0^{2\pi}R_k(u-\theta_1)f(\theta_1,\theta_2)d\theta_1 - f(u,\theta_2)\right| \leqslant 2\left\|\frac{\partial f}{\partial\theta_1}\right\|\varepsilon + 4\pi\|f\|d_k(\varepsilon)$$

On en déduit par intégration que

$$\begin{aligned}
|f_k(u,v)-g_k(u,v)| &= \left|f_k(u,v) - \int_0^{2\pi}R_k(v-\theta_2)f(u,\theta_2)d\theta_2\right| \\
&\leqslant \int_0^{2\pi}R_k(v-\theta_2)\left|\int_0^{2\pi}R_k(u-\theta_1)f(\theta_1,\theta_2)d\theta_1 - f(u,\theta_2)\right|d\theta_2 \\
&\leqslant \int_0^{2\pi}R_k(v-\theta_2)\left(2\left\|\frac{\partial f}{\partial\theta_1}\right\|\varepsilon + 4\pi\|f\|d_k(\varepsilon)\right)\theta_2 \\
&\leqslant 2\left\|\frac{\partial f}{\partial\theta_1}\right\|\varepsilon + 4\pi\|f\|d_k(\varepsilon)
\end{aligned}$$

De plus, en appliquant encore la question 10) mais à la fonction $h : t \mapsto f(u,t)$ qui est 2π-périodique et de classe $\mathscr{C}^1$ on obtient que

$$|g_k(u,v) - f(u,v)| = \left| \int_0^{2\pi} R_k(v-\theta_2) f(u,\theta_2) d\theta_2 - f(u,v) \right| \leqslant 2 \left\| \frac{\partial f}{\partial \theta_2} \right\| \varepsilon + 4\pi \|f\| d_k(\varepsilon)$$

On en déduit, par inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned} |f_k(u,v) - f(u,v)| &\leqslant \left| f_k(u,v) - \int_0^{2\pi} R_k(v-\theta_2) f(u,\theta_2) d\theta_2 \right| + \left| \int_0^{2\pi} R_k(v-\theta_2) f(u,\theta_2) d\theta_2 - f(u,v) \right| \\ &\leqslant 2\varepsilon \left(\left\| \frac{\partial f}{\partial \theta_1} \right\| + \left\| \frac{\partial f}{\partial \theta_2} \right\| \right) + 8\pi \|f\| d_k(\varepsilon) \end{aligned}$$

16. On pose $M = 2\left(\left\| \frac{\partial f}{\partial \theta_1} \right\| + \left\| \frac{\partial f}{\partial \theta_2} \right\| \right) + 8\pi \|f\|$.
On se donne $\varepsilon \in]0,\pi[$. On sait d'après la question 9) que $\lim\limits_{k\to+\infty} d_k(\varepsilon) = 0$. Il existe donc $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $d_k(\varepsilon) < \varepsilon$. On fixe alors un tel entier k. D'après la question 14) la fonction f_k vérifie le Théorème Ergodique donc

$$\lim_{T\to+\infty} \int_0^T (f_k \circ \theta)(t)\ dt = (2\pi)^{-2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f_k(\theta_1,\theta_2)\, d\theta_1 d\theta_2$$

Par définition de la limite, il existe $T_0 > 0$ tel que pour $T \geqslant T_0$,

$$\left| \frac{1}{T} \int_0^T (f_k \circ \theta)(t)\ dt - (2\pi)^{-2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f_k(\theta_1,\theta_2)\, d\theta_1 d\theta_2 \right| < \varepsilon$$

Pour $T \geqslant T_0$,

$$\left| \frac{1}{T} \int_0^T (f \circ \theta)(t)\ dt - (2\pi)^{-2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta_1,\theta_2)\, d\theta_1 d\theta_2 \right| \leqslant A + B + C$$

où

$$A = \left| \frac{1}{T} \int_0^T (f \circ \theta)(t)\ dt - \frac{1}{T} \int_0^T (f_k \circ \theta)(t)\ dt \right| \leqslant \frac{T}{T} \|f - f_k\| \leqslant M\varepsilon$$

$$B = \left| \frac{1}{T} \int_0^T (f_k \circ \theta)(t)\ dt - (2\pi)^{-2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f_k(\theta_1,\theta_2)\, d\theta_1 d\theta_2 \right| < \varepsilon$$

et

$$\begin{aligned} C &= \left| (2\pi)^{-2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f_k(\theta_1,\theta_2)\, d\theta_1 d\theta_2 - (2\pi)^{-2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta_1,\theta_2)\, d\theta_1 d\theta_2 \right| \\ &\leqslant (2\pi)^{-2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \|f - f_k\| \leqslant M\varepsilon \end{aligned}$$

Donc pour $T \geqslant T_0$,

$$\left| \frac{1}{T} \int_0^T (f \circ \theta)(t)\ dt - (2\pi)^{-2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta_1,\theta_2)\, d\theta_1 d\theta_2 \right| \leqslant (2M+1)\varepsilon$$

Cela prouve le Théorème Ergodique pour f.

17. a) La fonction $\psi_{a,b}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[0,2\pi]\setminus\{a,b\}$ par les théorèmes généraux.
Vérifions que $\psi_{a,b}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur un voisinage de a. On voit d'abord que $\psi_{a,b}$ est continue en a car $\lim\limits_{t\to a}\sin^2(\frac{\pi}{b-a}(t-a))=\sin^2(0)=0$.
Sur $]a,b[$, $\psi'_{a,b}(t)=\dfrac{2\pi}{b-a}\cos(\frac{\pi}{b-a}(t-a))\sin(\frac{\pi}{b-a}(t-a))$. On en déduit que $\lim\limits_{t\to a^+}\psi'_{a,b}(t)=0$.
Par le théorème de dérivabilité d'un prolongement, la fonction $\psi_{a,b}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur un voisinage de a. Un calcul similaire en utilisant que $\sin(\frac{\pi}{b-a}(b-a))=\sin(\pi)=0$ donne que $\psi_{a,b}$ est aussi de classe $\mathscr{C}^1$ au voisinage de b.

b) Supposons par l'absurde que $\forall t\in[0,+\infty[\quad x(t)\notin\Omega$.
Comme Ω est ouvert et non vide, il contient une boule ouverte au sens de la norme

$$||.||_{\infty,(e_1,e_2)}:\mathbb{R}^2\ni y\mapsto max(|e_1^*(y)|,|e_2^*(y)|)$$

donc il existe $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in]0,1[$ tels que $\alpha<\beta$ et $\gamma<\delta$ et $\Omega\supset\{ue_1+ve_2,\ (u,v)\in]\alpha,\beta[\times]\gamma,\delta[\}$.
Ainsi pour tout $t\geqslant 0$, posant $(x_1(t),x_2(t)=(\cos(t\omega_1+\varphi_1),\cos(t\omega_2+\varphi_2))$, on a $(x_1(t),x_2(t))\notin]\alpha,\beta[\times]\gamma,\delta[$.
Posons $a=arccos(\beta),b=arccos(\alpha),c=arccos(\delta),d=arccos(\gamma)$ et

$$\Phi:(\theta_1,\theta_2)\mapsto\tilde{\psi}_{a,b}(\theta_1)\tilde{\psi}_{c,d}(\theta_2)$$

où $\tilde{\psi}_{a,b}$ est la fonction obtenue en prolongeant $\psi_{a,b}$ par 2π-périodicité.
Comme $\tilde{\psi}_{a,b}$ est nulle au voisinage des multiples de 2π elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
Donc Φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ comme produit de $\tilde{\psi}_{a,b}\circ((\theta_1,\theta_2)\mapsto\theta_1)$ et de ..., qui sont des composées de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.
De plus pour tout $t\geqslant 0$

$$\Phi(\theta(t))=\Phi(t\omega_1+\varphi_1,t\omega_2+\varphi_2)=0$$

car

$$(t\omega_1+\varphi_1,t\omega_2+\varphi_2)\notin\bigcup_{(p,q)\in\mathbb{Z}^2}\Big(]a+2\pi p,b+2\pi p[\times]c+2\pi q,d+2\pi q[\Big)$$

car sinon on aurait

$$(\cos(t\omega_1+\varphi_1),\cos(t\omega_2+\varphi_2)\in]\alpha,\beta[\times]\gamma,\delta[$$

par décroissance stricte de cos sur $[0,\pi]$.
Par le théorème ergodique, on aurait

$$0=(2\pi)^{-2}\left(\int_0^{2\pi}R_k(u-\theta_1)\tilde{\psi}_{a,b}(\theta_1)d\theta_1\right)\left(\int_0^{2\pi}R_k(u-\theta_2)\tilde{\psi}_{c,d}(\theta_2)d\theta_2\right)$$

ce qui est contradictoire car les deux intégrales du membre de droite sont strictement positives car les intégrandes sont positives, continues et non identiquement nulles, et $0\neq 2\pi$.
Ainsi $\boxed{\text{il existe } t\geqslant 0 \text{ tel que } x(t)\in\Omega}$.