Oscillations linéaires et un théorème ergodique

D'après Mines PC 2011

On désigne par $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels et par $\mathbb{N}^*$ l'ensemble des entiers naturels strictement positifs.
Soit $k \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathscr{C}^k([0,+\infty[;\mathbb{R}^n)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^k$ sur $[0,+\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. Pour chaque fonction $x \in \mathscr{C}^2([0,+\infty[;\mathbb{R}^n)$, on notera $x'(t)$ la dérivée première de x au point t et $x''(t)$ sa dérivée seconde.
On désignera $\mathscr{C}_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions continues qui sont 2π-périodiques, c'est-à-dire les fonctions $h : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ vérifiant :

$$\forall t \in \mathbb{R}, h(t+2\pi) = h(t)$$

On désigne par $\langle\,;\rangle$ le produit scalaire euclidien canonique de $\mathbb{R}^n$. On identifiera chaque vecteur x de $\mathbb{R}^n$ à un vecteur colonne, encore noté x, de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Pour x, y dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a donc

$$\langle x; y\rangle = x^\top y$$

On note $S_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques réelles définies positives de taille n.
Dans tout le sujet, on considère deux matrices A et K de $S_n^{++}(\mathbb{R})$.

I. Oscillations d'un certain système linéaire

1. Prouver que la matrice A est inversible.
2. Montrer que la matrice A^{-1} est symétrique.

Pour $x, y \in \mathbb{R}^n$, on pose : $(x;y)_A = \langle Ax; y\rangle$. On désigne par u l'endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ défini par $\forall x \in \mathbb{R}^n, u(x) = A^{-1}Kx$.

3. Prouver que $(\,;\,)_A$ définit un produit scalaire de $\mathbb{R}^n$. Puis montrer que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, (u(x);y)_A = (x;u(y))_A$$

4. Montrer qu'il existe une base $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ de $\mathbb{R}^n$ et n réels strictement positifs $\lambda_i \in \mathbb{R}^{+*} (1 \leqslant i \leqslant n)$ tels que

$$\forall i \in \{1,\ldots,n\}, u(e_i) = A^{-1}Ke_i = \lambda_i e_i$$

Dans la suite, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on note $\omega_i = \sqrt{\lambda_i}$.
On considère l'équation différentielle :

$$\forall t \in [0,+\infty[, Ax''(t) = -Kx(t) \tag{1}$$

de fonction inconnue $x \in \mathscr{C}^2([0,+\infty[;\mathbb{R}^n)$

5. Montrer que $x \in \mathscr{C}^2([0,+\infty[;\mathbb{R}^n)$ est solution de l'équation différentielle (1) si et seulement si il existe $2n$ nombres réels $(a_i)_{1\leqslant i\leqslant n}, (b_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ tels que :

$$\forall t \in [0,+\infty[, x(t) = \sum_{i=1}^{n} \left(a_i\cos(\omega_i t) + b_i \sin(\omega_i t)\right) e_i$$

   Quelle est la dimension de l'espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle homogène (1) ?

6. Soient $x, y \in \mathscr{C}^1([0,+\infty[;\mathbb{R}^n)$. Prouver que

$$\forall t \in [0,+\infty[, \frac{d}{dt}(\langle Ax; y\rangle)(t) = \langle Ax'(t); y(t)\rangle + \langle Ax(t); y'(t)\rangle$$

7. Soit $x \in \mathscr{C}^2([0,+\infty[;\mathbb{R}^n)$ une solution de l'équation différentielle (1). Pour chaque réel $t \geqslant 0$ on pose, $T(x)(t) = \frac{1}{2}\langle Ax'(t); x'(t)\rangle$ et $U(x)(t) = \frac{1}{2}\langle Kx(t); x(t)\rangle$. Montrer alors que la quantité $T(x)(t) + U(x)(t)$ ne dépend pas de $t \in [0,+\infty[$.

Les solutions de (1) interviennent en physique ; l'objet de la partie III est d'étudier leur comportement quand $t \to +\infty$ dans le cas $n = 2$. Les quantités $T(x)(t)$ et $U(x)(t)$ représentent respectivement une énergie cinétique et une énergie potentielle.

II. Résultats intermédiaires.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On va définir un réel positif c_k tel que : $c_k \displaystyle\int_0^{2\pi} \left(\frac{1+\cos t}{2}\right)^k dt = 1$.

8. Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi} \left(\frac{1+\cos t}{2}\right)^k \sin t \, dt$. En déduire que c_k est bien défini et que $c_k \leqslant \frac{k+1}{4}$.
   On pourra poser le changement de variable $u = \cos t$.

Pour tout réel t on pose $R_k(t) = c_k \left(\frac{1+\cos t}{2}\right)^k$.

9. Soit $\varepsilon \in]0,\pi[$. On pose : $d_k(\varepsilon) = \sup_{t\in[\varepsilon, 2\pi-\varepsilon]} R_k(t)$. Prouver alors que

$$\lim_{k\to+\infty} d_k(\varepsilon) = 0$$

10. a) Soit $g \in \mathscr{C}_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C})$. Montrer que g est bornée. On notera alors $\|g\| = \sup_{t\in\mathbb{R}} |g(t)|$.
    b) Soit $\varepsilon \in]0,\pi[$, et $k \in \mathbb{N}$. Prouver que pour toute $h \in \mathscr{C}_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C})$ qui est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et tout réel u, on a :

$$\int_0^{2\pi} R_k(u-t)h(t)dt = \int_0^{2\pi} R_k(t_1)\, h(u-t_1)\, dt_1, \text{ et}$$
$$\left|\int_0^{2\pi} R_k(u-t)h(t)dt - h(u)\right| \leqslant 2\|h'\|\varepsilon + 4\pi\|h\| d_k(\varepsilon).$$

    On rappelle que $\displaystyle\int_0^{2\pi} R_k(t_1)\, dt_1 = 1$.
    Pour établir l'inégalité, on pourra utiliser que pour tout $t_1 \in [2\pi-\varepsilon, 2\pi]$, $h(u-t_1) = h(u-t_1+2\pi)$

III. Un théorème ergodique.

Dans toute la suite on se limite au cas $n = 2$ de la partie I.

11. Soit $x \in \mathscr{C}^2([0,+\infty[;\mathbb{R}^2)$ une solution de l'équation (1). Montrer qu'il existe quatre réels $c_1, c_2, \varphi_1, \varphi_2$ tels que :

$$\forall t \in [0,+\infty[, x(t) = \sum_{i=1}^{2} c_i \cos(\omega_i t + \varphi_i)\, e_i \tag{2}$$

    (On rappelle que les deux vecteurs e_1, e_2 sont introduits dans la Question 4).

Dans la suite on fixe deux réels φ_1, φ_2 et on pose :

$$\forall t \in [0, +\infty[, \ \theta(t) = (\omega_1 t + \varphi_1, \omega_2 t + \varphi_2) \tag{3}$$

Jusqu'à la fin de l'énoncé, on suppose que $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ n'est pas un nombre rationnel. On suppose donc qu'il n'existe pas d'entiers naturels $m_1, m_2 \in \mathbb{N}^*$ tels que $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{m_1}{m_2}$.
On désigne par $\mathscr{C}_{2\pi,2\pi}(\mathbb{R}^2; \mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions continues $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ telles que :

$$\forall (\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2, f(\theta_1 + 2\pi, \theta_2) = f(\theta_1, \theta_2) = f(\theta_1, \theta_2 + 2\pi)$$

On désigne par $\mathscr{C}^1_{2\pi,2\pi}(\mathbb{R}^2; \mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions $f \in \mathscr{C}_{2\pi,2\pi}(\mathbb{R}^2; \mathbb{C})$ qui sont de classe $\mathscr{C}^1$.

12. Soit $f \in \mathscr{C}_{2\pi,2\pi}(\mathbb{R}^2; \mathbb{C})$.
   a) Prouver que f est bornée et que $(\theta_1, \theta_2) \mapsto |f(\theta_1, \theta_2)|$ atteint sa borne supérieure sur $\mathbb{R}^2$.
   Avec les notations de la question précédente, on posera $\|f\| = \sup_{(\theta_1,\theta_2)\in\mathbb{R}^2} |f(\theta_1, \theta_2)|$.
   b) Montrer que $\theta_2 \mapsto \displaystyle\int_0^{2\pi} f(\theta_1, \theta_2)\, d\theta_1$ est continue sur $\mathbb{R}$.

On pose alors :

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta_1, \theta_2)\, d\theta_1 d\theta_2 = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} f(\theta_1, \theta_2)\, d\theta_1 \right) d\theta_2$$

Le but de cette partie est de démontrer le résultat suivant :
Théorème 1 (Théorème Ergodique) *Soit $f \in \mathscr{C}^1_{2\pi,2\pi}(\mathbb{R}^2; \mathbb{C})$. Alors,*

$$\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \int_0^T (f \circ \theta)(t)\ dt = (2\pi)^{-2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta_1, \theta_2)\, d\theta_1 d\theta_2 \tag{4}$$

(On rappelle que $\theta(t)$ est défini dans (3) et que $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ n'est pas un nombre rationnel).

13. Soit $j, \ell \in \mathbb{Z}$. Prouver le Théorème Ergodique dans le cas particulier de la fonction $(\theta_1, \theta_2) \mapsto f(\theta_1, \theta_2) = e^{i\theta_1 j} e^{i\theta_2 \ell}$.
   Dans le cas où $(j, \ell) \neq (0, 0)$ on pourra vérifier que $j\omega_1 + \ell\omega_2$ est non nul puis on pourra calculer séparément chaque membre de (4) dans ce cas particulier

Dans les trois questions suivantes on fixe un élément quelconque $f \in \mathscr{C}^1_{2\pi,2\pi}(\mathbb{R}^2; \mathbb{C})$. Pour chaque $k \in \mathbb{N}^*$ on pose :

$$\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2, f_k(u, v) = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} R_k(u - \theta_1)\, R_k(v - \theta_2)\, f(\theta_1, \theta_2)\, d\theta_1 d\theta_2$$

14. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Prouver qu'il existe $(2k + 1)^2$ nombres complexes $(a_{j,\ell})_{-k\leqslant j,\ell\leqslant k}$ tels que pour tout $(u, v) \in \mathbb{R}^2$: $f_k(u, v) = \sum_{-k\leqslant j,\ell\leqslant k} a_{j,\ell} e^{iuj} e^{iv\ell}$.
   Justifier que la fonction f_k vérifie le Théorème Ergodique.
15. Soit $\varepsilon \in]0, \pi[$ et $k \in \mathbb{N}^*$.
   En appliquant la Question 10, prouver que pour tout $(u, v) \in \mathbb{R}^2$:

$$|f_k(u, v) - f(u, v)| \leqslant 2\varepsilon \left(\left\| \frac{\partial f}{\partial \theta_1} \right\| + \left\| \frac{\partial f}{\partial \theta_2} \right\| \right) + 8\pi \|f\| d_k(\varepsilon)$$

   On pourra soustraire et ajouter $g_k(u, v) = \displaystyle\int_0^{2\pi} R_k(v - \theta_2) f(u, \theta_2) d\theta_2$.

16. Prouver le Théorème Ergodique pour la fonction f.
On pourra poser $M = 2\left(\left\|\frac{\partial f}{\partial \theta_1}\right\| + \left\|\frac{\partial f}{\partial \theta_2}\right\|\right) + 8\pi\|f\|$.
Pour $\varepsilon > 0$ *donné, on pourra choisir* $k \in \mathbb{N}^*$ *tel que* $d_k(\varepsilon) < \varepsilon$. *Ensuite, on pourra appliquer la Question 14 à* f_k *et considérer* $T_0 > 0$ *tel que pour tout* $T \geqslant T_0$

$$\left|\frac{1}{T}\int_0^T (f_k \circ \theta)(t)\, dt - (2\pi)^{-2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f_k(\theta_1, \theta_2)\, d\theta_1 d\theta_2\right| < \varepsilon$$

17. a) Soit $a, b \in]0, 2\pi[$ tels que $0 < a < b < 2\pi$. On pose $\psi_{a,b} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ définie par

$$\psi_{a,b} : t \mapsto \begin{cases} \sin^2\left(\frac{\pi}{b-a}(t-a)\right) & \text{si } t \in]a, b[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que ψ est de classe $\mathscr{C}^1$.

b) On considère la solution $x(t) = \sum_{i=1}^{2} \cos(t\omega_i + \varphi_i)\, e_i$ de l'équation (1) obtenue en prenant pour constantes $c_1 = c_2 = 1$ dans (2). Soit Ω un ouvert non vide de $\{ue_1 + ve_2 / u, v \in]-1, 1[\}$. Prouver qu'il existe $t \in [0, +\infty[$ tel que $x(t) \in \Omega$.
On pourra raisonner par l'absurde et justifier alors l'existence d'une fonction $\Phi \in \mathscr{C}^1_{2\pi,2\pi}(\mathbb{R}^2; \mathbb{C})$ *telle que* $\Phi(\theta(t))$ *est nulle pour tout* $t \in [0, +\infty[$. *On pourra chercher une telle fonction sous la forme* $\Phi : (\theta_1, \theta_2) \mapsto \Phi_1(\theta_1)\Phi_2(\theta_2)$

Fin de l'épreuve.

Le Théorème Ergodique dit que la moyenne temporelle de la grandeur physique f *coincide avec la moyenne spatiale de* f. *Il s'agit de l'hypothèse ergodique du physicien Boltzmann. La Question 17 est alors une illustration du fait que toute trajectoire du système (hamiltonien) ergodique rencontre tout ouvert de l'espace des phases.*