CONCOURS MINES-PONTS 2022

EPREUVE MATHEMATIQUES I - MP

Durée : 3 heures

Les calculatrices sont interdites.

Formule asymptotique de Hardy et Ramanujan

L'objectif de ce problème est l'étude asymptotique du nombre de partitions d'un entier naturel n, c'est-à-dire du nombre de décompositions de n en somme d'entiers naturels non nuls (sans tenir compte de l'ordre des termes). Une définition rigoureuse de ce nombre, noté p_n, est donnée en début de partie **B**. Dans la partie **A**, on introduit une fonction P de variable complexe ; dans la fin de la partie **B** on démontre qu'il s'agit de la somme, sur le disque unité ouvert de $\mathbb{C}$, de la série entière $\sum_{n\geq 0} p_n z^n$. L'étude de P au voisinage de 1 permet alors, dans les parties suivantes, de progresser vers l'obtention d'un équivalent simple de la suite $(p_n)_{n\in\mathbf{N}}$ (formule asymptotique de Hardy et Ramanujan).
Tout au long du problème, le disque unité ouvert de $\mathbb{C}$ sera noté

$$D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}.$$

Dans tout l'énoncé, on utilisera la dénomination ‹‹variable aléatoire réelle›› pour signifier ‹‹variable aléatoire discrète réelle›› .
On admettra aussi les deux identités classiques suivantes :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{u^2}{2}}\,\mathrm{d}u = \sqrt{2\pi}$$

A. Fonctions L et P

1 $\triangleright$ Soit $z \in D$. Montrer la convergence de la série $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{z^n}{n}$. Préciser la valeur de sa somme lorsque $z \in]-1,1[$. On notera

$$L(z) := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n}$$

2 $\triangleright$ Soit $z \in D$. Montrer que la fonction $t \in [0,1] \mapsto L(tz)$ est dérivable et donner une expression simple de sa dérivée.
En déduire que $t \mapsto (1-tz)e^{L(tz)}$ est constante sur $[0,1]$ et conclure que

$$\exp(L(z)) = \frac{1}{1-z}.$$

3 $\triangleright$ Montrer que $|L(z)| \leq -\ln(1-|z|)$ pour tout z dans D. En déduire la convergence de la série $\sum\limits_{n\geq 1} L(z^n)$ pour tout z dans D. Dans la suite, on notera, pour z dans D,

$$P(z) := \exp\left[\sum_{n=1}^{+\infty} L(z^n)\right].$$

On remarque, en vertu de la question précédente et des propriétés de l'exponentielle, que

$$\forall z \in D, P(z) \neq 0 \quad \text{et} \quad P(z) = \lim_{N\to+\infty} \prod_{n=1}^{N} \frac{1}{1-z^n}$$

B. Développement de P en série entière

Pour $(n, N) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, on note $P_{n,N}$ l'ensemble des listes $(a_1, \ldots, a_N) \in \mathbb{N}^N$ telles que $\sum\limits_{k=1}^{N} k a_k = n$. Si cet ensemble est fini, on note $p_{n,N}$ son cardinal.

4 $\triangleright$ Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $P_{n,N}$ est fini pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, que la suite $(p_{n,N})_{N \geq 1}$ est croissante et qu'elle est constante à partir du rang $\max(n, 1)$.

Dans toute la suite, on notera p_n la valeur finale de $(p_{n,N})_{N \geq 1}$.

5 $\triangleright$ Montrer par récurrence que

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \forall z \in D, \prod_{k=1}^{N} \frac{1}{1 - z^k} = \sum_{n=0}^{+\infty} p_{n,N} z^n$$

6 $\triangleright$ Soit $z \in D$. On convient que $p_{n,0} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En examinant la sommabilité de la famille $((p_{n,N+1} - p_{n,N})\, z^n)_{(n,N) \in \mathbb{N}^2}$, démontrer que

$$P(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n z^n.$$

En déduire le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n} p_n x^n$.

7 $\triangleright$ Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que pour tout réel $t > 0$,

$$p_n = \frac{e^{nt}}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\theta} P\left(e^{-t+i\theta}\right) d\theta$$

si bien que

$$p_n = \frac{e^{nt} P\left(e^{-t}\right)}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\theta} \frac{P\left(e^{-t+i\theta}\right)}{P\left(e^{-t}\right)} d\theta \qquad (1)$$

Dans le reste du problème, l'objectif est d'obtenir un équivalent du nombre p_n lorsque n tend vers $+\infty$. Cet équivalent sera obtenu via un choix approprié de t en fonction de n dans la formule (1).

C. Contrôle de P

8 $\triangleright$ Soit $x \in [0, 1[$ et $\theta \in \mathbb{R}$. En utilisant la fonction L, montrer que

$$\left| \frac{1 - x}{1 - xe^{i\theta}} \right| \leq \exp(-(1 - \cos\theta)x).$$

En déduire que pour tout $x \in [0, 1[$ et tout réel θ,

$$\left| \frac{P\left(xe^{i\theta}\right)}{P(x)} \right| \leq \exp\left(-\frac{1}{1 - x} + \operatorname{Re}\left(\frac{1}{1 - xe^{i\theta}}\right)\right).$$

9 $\triangleright$ Soit $x \in [\frac{1}{2}, 1[$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$\frac{1}{1 - x} - \operatorname{Re}\left(\frac{1}{1 - xe^{i\theta}}\right) \geq \frac{x(1 - \cos\theta)}{(1 - x)\left((1 - x)^2 + 2x(1 - \cos\theta)\right)}$$

En déduire que

$$\left| \frac{P\left(xe^{i\theta}\right)}{P(x)} \right| \leq \exp\left(-\frac{1 - \cos\theta}{6(1 - x)^3}\right) \text{ ou que } \left| \frac{P\left(xe^{i\theta}\right)}{P(x)} \right| \leq \exp\left(-\frac{1}{3(1 - x)}\right).$$

D. Intermède : quelques estimations de sommes

On fixe dans cette partie un réel $\alpha > 0$ et un entier $n \geq 1$. Sous réserve d'existence, on pose

$$S_{n,\alpha}(t) := \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k^n e^{-kt\alpha}}{(1-e^{-kt})^n}$$

On introduit aussi la fonction

$$\varphi_{n,a} : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{x^n e^{-\alpha x}}{(1-e^{-x})^n},$$

qui est évidemment de classe $\mathcal{C}^\infty$.

10 $\triangleright$ Montrer que $\varphi_{n,\alpha}$ et $\varphi'_{n,\alpha}$ sont intégrables sur $]0, +\infty[$.

11 $\triangleright$ Montrer, pour tout réel $t > 0$, l'existence de $S_{n,a}(t)$, sa positivité stricte, et l'identité

$$\int_0^{+\infty} \varphi_{n,\alpha}(x)dx = t^{n+1} S_{n,\alpha}(t) - \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{kt}^{(k+1)t} (x-kt)\varphi'_{n,\alpha}(x)dx.$$

En déduire que

$$S_{n,\alpha}(t) = \frac{1}{t^{n+1}} \int_0^{+\infty} \frac{x^n e^{-\alpha x}}{(1-e^{-x})^n}\, dx + O\left(\frac{1}{t^n}\right) \qquad \text{quand } t \to 0^+.$$

12 $\triangleright$ Démontrer, sans utiliser ce qui précède, que

$$\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-x}}{1-e^{-x}}\, \mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{6}.$$

Dans le reste du problème, nous admettrons le résultat suivant (il peut être démontré par une méthode similaire) :

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2 e^{-x}}{(1-e^{-x})^2}\, dx = \frac{\pi^2}{3}$$

E. Contrôle des fonctions caractéristiques

Étant donné une variable aléatoire réelle X sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, ainsi qu'un réel θ, les variables aléatoires réelles $\cos(\theta X)$ et $\sin(\theta X)$ sont d'espérance finie puisque bormées : on introduit alors le nombre complexe

$$\Phi_X(\theta) := \mathbb{E}(\cos(\theta X)) + i\mathbb{E}(\sin(\theta X)).$$

13 $\triangleright$ Soit X une variable aléatoire réelle, Montrer que $|\Phi_X(\theta)| \leq 1$ pour tout réel θ.

Dans les questions 14$\triangleright$ à 18$\triangleright$, on se donne une variable aléatoire réelle X suivant une loi géométrique, de paramètre $p \in]0, 1[$ arbitraire. On pose $q = 1 - p$.

14 $\triangleright$ Montrer que pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et tout réel θ,

$$\Phi_{aX+b}(\theta) = \frac{pe^{i(a+b)\theta}}{1-qe^{ia\theta}}.$$

15 $\triangleright$ Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, la variable aléatoire X^k est d'espérance finie. Montrer que Φ_X est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que $\Phi_X^{(k)}(0) = i^k \mathbb{E}\left(X^k\right)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

16 $\triangleright$ Montrer qu'il existe une suite $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de polynômes à coefficients dans $\mathbb{C}$, indépendante de p, telle que

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{N}, \Phi_X^{(k)}(\theta) = p i^k e^{i\theta} \frac{P_k\left(qe^{i\theta}\right)}{\left(1-qe^{i\theta}\right)^{k+1}} \text{ et } P_k(0) = 1.$$

17 $\triangleright$ En déduire qu'il existe une suite $(C_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de réels strictement positifs, indépendante de p, telle que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \left|\mathbb{E}\left(X^k\right) - \frac{1}{p^k}\right| \leq \frac{C_k q}{p^k}.$$

18 $\triangleright$ En déduire qu'il existe un réel $K > 0$ indépendant de p tel que

$$\mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^4\right) \leq \frac{Kq}{p^4}.$$

Dans les questions 19$\triangleright$ à 21$\triangleright$, on se donne une variable aléatoire réelle centrée Y telle que Y^4 soit d'espérance finie.

19 $\triangleright$ Montrer successivement que Y^2 et $|Y|^3$ sont d'espérance finie, et que

$$\mathbb{E}\left(Y^2\right) \leq \left(\mathbb{E}\left(Y^4\right)\right)^{1/2} \text{ puis } \mathbb{E}\left(|Y|^3\right) \leq \left(\mathbb{E}\left(Y^4\right)\right)^{3/4}$$

20 $\triangleright$ Montrer, pour tout réel u, l'inégalité

$$\left|e^{iu} - 1 - iu + \frac{u^2}{2}\right| \leq \frac{|u|^3}{6}$$

En déduire que pour tout réel θ,

$$\left|\Phi_Y(\theta) - 1 + \frac{\mathbb{E}\left(Y^2\right)\theta^2}{2}\right| \leq \frac{|\theta|^3}{3}\left(\mathbb{E}\left(Y^4\right)\right)^{3/4}.$$

21 $\triangleright$ Conclure que pour tout réel θ,

$$\left|\Phi_Y(\theta) - \exp\left(-\frac{\mathbb{E}\left(Y^2\right)\theta^2}{2}\right)\right| \leq \frac{|\theta|^3}{3}\left(\mathbb{E}\left(Y^4\right)\right)^{3/4} + \frac{\theta^4}{8}\mathbb{E}\left(Y^4\right)$$

F. Convergence vers une gaussienne

Étant donné un réel $t > 0$, on pose, suivant les notations de la partie **C**,

$$m_t := S_{1,1}(t) \text{ et } \quad \sigma_t := \sqrt{S_{2,1}(t)}.$$

Etant donné des réels $t > 0$ et θ, on pose

$$h(t,\theta) = e^{-im_t\theta}\frac{P\left(e^{-t}e^{i\theta}\right)}{P\left(e^{-t}\right)}.$$

Étant donné des réels $t > 0$ et u, on pose

$$\zeta(t,u) = \exp\left(i\frac{u}{\sigma_t}\left(m_t - \frac{\pi^2}{6t^2}\right)\right) \quad \text{et} \quad j(t,u) = \zeta(t,u)h\left(t, \frac{u}{\sigma_t}\right).$$

22 ▷ Soit $n \in \mathbb{N}^*$ ainsi que des complexes $z_1, \ldots, z_n, u_1, \ldots, u_n$ tous de module inférieur ou égal à 1. Montrer que

$$\left|\prod_{k=1}^{n} z_k - \prod_{k=1}^{n} u_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |z_k - u_k|.$$

23 ▷ Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $t \in \mathbb{R}_+^*$. On considère, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, une variable aléatoire Z_k suivant la loi $\mathcal{G}\left(1 - e^{-kt}\right)$, et on pose $Y_k = k\left(Z_k - \mathbb{E}\left(Z_k\right)\right)$. Démontrer que

$$h(t,\theta) = \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} \Phi_{Y_k}(\theta).$$

En déduire, à l'aide en particulier de la question 21▷ l'inégalité

$$\left|h(t,\theta) - e^{-\frac{\sigma_t^2\theta^2}{2}}\right| \leq K^{3/4}|\theta|^3 S_{3,3/4}(t) + K\theta^4 S_{4,1}(t).$$

On rappelle que la constante K a été introduite à la question 18▷, les quantités $S_{n,\alpha}(t)$ dans la partie D.

24 ▷ Montrer que $\sigma_t \sim \frac{\pi}{\sqrt{3}t^{1/2}}$ quand t tend vers 0^+. En déduire, pour tout réel u, que

$$j(t,u) \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} e^{-s^2/2}$$

25 ▷ Montrer qu'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que

$$\forall \theta \in [-\pi, \pi], 1 - \cos\theta \geq \alpha\theta^2.$$

À l'aide de la question 9▷, en déduire qu'il existe trois réels $t_0 > 0, \beta > 0$ et $\gamma > 0$ tels que, pour tout $t \in [0, t_0]$ et tout $\theta \in [-\pi, \pi]$,

$$|h(t,\theta)| \leq e^{-\beta(\sigma_t\ \theta)^2} \quad \text{ou} \quad |h(t,\theta)| \leq e^{-\gamma(\sigma_t\ |\theta|)^{2/3}}.$$

26 ▷ Conclure que

$$\int_{-\pi\sigma_t}^{\pi\sigma_t} j(t,u)du \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} \sqrt{2\pi}$$

G. La conclusion

Dans cette dernière partie, on admet que $P\left(e^{-t}\right) \sim \sqrt{\frac{t}{2\pi}} \exp(\frac{\pi}{6t})$ quad t tnd vers 0^{+}.

27 ▷ En appliquant la formule (1) à $t = \frac{\pi}{\sqrt{6n}}$, démontrer que

$$p_n \sim \frac{\exp\left(\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}\right)}{4\sqrt{3}n} \text{ quand } n \to +\infty$$

formule découverte par Hardy et Ramanujan en 1918.

FIN DU PROBLÈME