Exercice (Exercice 3 p 66)

Soit $(E)\ :\ y' - y + f = 0$ avec f une fonction continue et intégrable sur $\mathbf{R}$.

1. *En déterminant l'ensemble des solutions de (E) en utilisant f, montrer qu'il existe une unique solution F qui soit bornée sur $\mathbf{R}$.*
2. *Montrer que F est intégrable sur $\mathbf{R}$.*
3. *Comparer les intégrales sur $\mathbf{R}$ de f et de F au moyen de (E).*

Solution :

1. Notons (H) : $y' - y = 0$ l'équation homogène associée. Les solutions des (H) sont de la forme $x \mapsto \lambda(x)e^x$. On cherche alors une solution particulière à l'équation (E) sous la forme $y : x \mapsto \lambda(x)e^x$ par variation de la constante.

$$y \text{ vérifie (E)} \iff \forall x \in \mathbf{R}, \lambda'(x)e^x + \lambda(x)e^x - \lambda(x)e^x = -f(x) \iff \forall x \in \mathbf{R}, \lambda'(x) = -f(x)e^{-x}$$

Les solutions de (E) sont les fonctions de la forme $y : x \mapsto \left(\lambda - \int_0^x f(t)e^{-t}dt\right)e^x$. Procédons par analyse-synthèse.

— Soit F une solution de (E) bornée sur $\mathbf{R}$. Elle est de la forme $x \mapsto \left(\lambda - \int_0^x f(t)e^{-t}dt\right)e^x$. On voit que $f(t)e^{-t} = \underset{t\to+\infty}{o}(f(t))$ donc $t \mapsto f(t)e^{-t}$ est integrable sur $[0, +\infty[$ donc $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-t}dt$ converge. Comme $e^x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, nécessairement $\lambda = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-t}dt$ et donc

$$F : x \mapsto \left(\int_x^{+\infty} f(t)e^{-t}dt\right)e^x = \int_x^{+\infty} f(t)e^{x-t}dt$$

— Synthèse. Pour tout $x \in \mathbf{R}$, $|F(x)| \leqslant \int_x^{+\infty} |f(t)|dt \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|dt$.

2. Soit $a, b \in \mathbf{R}^2$ avec $a < b$.

$$\begin{aligned}
\int_a^b |F(x)|dx &\leqslant \int_a^b \left(\int_x^{+\infty} |f(t)|e^{-t}dt\right)e^x dx \\
&\leqslant \left[\left(\int_x^{+\infty} |f(t)|e^{-t}dt\right)e^x\right]_a^b + \int_a^b |f(x)|dx \\
&\leqslant e^b \int_b |f(t)|e^{-t}dt + \int_a^b |f(x)|dx \leqslant 2\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|dt
\end{aligned}$$

La fonction F est intégrable sur $\mathbf{R}$

3. Pour $a < b$.

$$\int_a^b F = \int_a^b F' + \int_a^b f = F(b) - F(a) + \int_a^b f$$

On a vu que $|F(x)| \leqslant \int_x^{+\infty} |f(t)|e^{-t}dt$ ce qui montrer que F tend vers 0 en $+\infty$.

De même, pour $x < 0$,

$$|F(x)| = \int_x^{x/2} |f(t)|e^{x-t}dt + \int_{x/2}^{+\infty} |f(t)|e^{x-t}dt \leqslant \int_x^{x/2} |f(t)|dt + \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|dt\right)e^{x/2} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

On a donc $\int_{-\infty}^{+\infty} |F| = \int_{-\infty}^{+\infty} |f|$.