1) Soit $k \in \mathbb{N}^*$: $\forall t \in [k, k+1]$, $\dfrac{1}{k+1} \leqslant \dfrac{1}{t} \leqslant \dfrac{1}{k}$ (par décroissance de $t \longmapsto \dfrac{1}{t}$ sur $[k, k+1]$).

Par croissance de l'intégrale, on a donc : $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{k+1}\, dt = \frac{1}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\, dt \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{k}\, dt = \frac{1}{k}$

Ainsi $\boxed{\dfrac{1}{k+1} \leqslant \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leqslant \frac{1}{k}}$.

2) a) Pour un entier n non nul, on somme de $k = 1$ à $k = n-1$:
$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} = -1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\, dt = \int_1^n \frac{1}{t}\, dt \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{n}$ (on a utilisé la relation de Chasles)

Ainsi $-1 + H_n \leqslant \displaystyle\int_1^n \frac{1}{t}\, dt = \ln(n) \leqslant H_n - \frac{1}{n}$ et donc

$$\ln(n) + \frac{1}{n} \leqslant H_n \leqslant \ln(n) + 1$$

b) Pour $n \geqslant 2$, on divise par $\ln(n) > 0$ et donc : $1 + \dfrac{1}{\ln(n)n} \leqslant \dfrac{H_n}{\ln n} \leqslant 1 + \dfrac{1}{\ln(n)}$ et donc par le théorème d'encadrement, $\left(\dfrac{H_n}{\ln n}\right)$ converge vers 1, et finalement

$$\boxed{H_n \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)}$$

3) a) Pour tout n non nul, $u_{n+1} - u_n = H_{n+1} - H_n - \ln(n+1) + \ln(n) = \dfrac{1}{n+1} - \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{1}{t}\, dt \leqslant 0$ d'après 1). La suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ est donc décroissante.

b) D'après 2) a), pour tout $n \geqslant 1$, on a : $0 \leqslant \dfrac{1}{n} \leqslant u_n \leqslant 1$, donc $u_n \in [0, 1]$ est une suite minorée et décroissante, donc elle converge vers γ.
Comme pour tout $n \geqslant 1$, on a : $0 \leqslant \leqslant u_n \leqslant 1$, par passage à la limite on a $0 \leqslant \gamma \leqslant 1$.

4) a) Les applications f' et $t \longmapsto \left(t - k - \dfrac{1}{2}\right)^2$ étant de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[k, k+1] \subset]0, +\infty[$, on peut opérer une intégration par parties :

$$\begin{aligned} J_k &= \frac{1}{2}\left[\left(t - k - \frac{1}{2}\right)^2 f'(t)\right]_k^{k+1} - \int_k^{k+1} \left(t - k - \frac{1}{2}\right) f'(t)\, dt \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} f'(k+1) - \frac{1}{4} f'(k)\right) - \int_k^{k+1} \left(t - k - \frac{1}{2}\right) f'(t)\, dt \end{aligned}$$

Par une nouvelle intégration par partie, on obtient :

$$\begin{aligned} J_k &= \frac{1}{8}(f'(k+1) - f'(k)) - \left[\left(t - k - \frac{1}{2}\right) f(t)\right]_k^{k+1} + \int_k^{k+1} f(t)\, dt \\ &= \frac{1}{8}(f'(k+1) - f'(k)) - \left(\frac{1}{2} f(k+1) - \left(-\frac{1}{2}\right) f(k)\right) + \int_k^{k+1} f(t)\, dt \end{aligned}$$

et donc finalement :

$$J_k = \frac{f'(k+1) - f'(k)}{8} - \frac{f(k+1) + f(k)}{2} + \int_k^{k+1} f(t)dt$$

b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on somme cette relation de $k=1$ à $k=n-1$:
$$\sum_{k=1}^{n-1} J_k = \frac{1}{8}\sum_{k=1}^{n-1} f'(k+1) - \frac{1}{8}\sum_{k=1}^{n-1} f'(k) - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1} f(k+1) - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1} f(k) + \sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1} f(t)\,dt =$$
$$= \frac{1}{8}\sum_{k=2}^{n} f'(k) - \frac{1}{8}\sum_{k=1}^{n-1} f'(k) - \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n} f(k) - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1} f(k) + \int_1^n f(t)\,dt$$ (par la relation de Chasles pour la dernière somme).

Ainsi : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} J_k = \frac{1}{8}f'(n) - \frac{1}{8}f'(1) - \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n} f(k) - f(1)\right) - \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n} f(k) - f(n)\right) + \int_1^n f(t)\,dt$

Ce qui est la relation annoncée, en réorganisant légèrement...
$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = \frac{f(1)+f(n)}{2} + \frac{f'(n)-f'(1)}{8} + \int_1^n f(t)dt - \sum_{k=1}^{n-1} J_k$$

5) a) f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $f''(x) = \frac{2}{x^3}$.

$\forall t \in [k, k+1]$, $\dfrac{2}{(k+1)^3} \leqslant \dfrac{2}{t^3} \leqslant \dfrac{2}{k^3}$ (par décroissance de $t \longmapsto \dfrac{1}{t^3}$ sur $[k, k+1]$).

En multipliant par $\left(t-k-\dfrac{1}{2}\right)^2$ qui est positif, on a :

$\forall t \in [k, k+1]$, $2\dfrac{\left(t-k-\frac{1}{2}\right)^2}{(k+1)^3} \leqslant 2\dfrac{\left(t-k-\frac{1}{2}\right)^2}{t^3} \leqslant 2\dfrac{\left(t-k-\frac{1}{2}\right)^2}{k^3}$; par croissance de l'intégrale, on a donc :
$$\frac{1}{(k+1)^3}\int_k^{k+1}\left(t-k-\frac{1}{2}\right)^2 dt \leqslant J_k = \int_k^{k+1}\frac{\left(t-k-\frac{1}{2}\right)^2}{t^3}\,dt \leqslant \frac{1}{k^3}\int_k^{k+1}\left(t-k-\frac{1}{2}\right)^2 dt.$$

Or $\displaystyle\int_k^{k+1}\left(t-k-\frac{1}{2}\right)^2 dt = \frac{1}{3}\left[\left(t-k-\frac{1}{2}\right)^3\right]_k^{k+1} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{8} - \left(-\frac{1}{8}\right)\right) = \frac{1}{12}$.

d'où $\dfrac{1}{12(k+1)^3} \leqslant J_k \leqslant \dfrac{1}{12k^3}$.

b) La série de terme général J_k étant à terme positif, on a $0 \leqslant J_k \leqslant \dfrac{1}{12k^3}$, donc comme la série de terme général $\dfrac{1}{k^3}$ est une série de Riemann convergente ($3>1$), la série de terme général $\dfrac{1}{12k^3}$ est convergente (opérations algébriques sur les séries convergentes), et donc la série $\sum (J_k)$ converge par comparaison.

c) C'est la même démarche que dans les questions 1) et 2) :

Pour tout $k \geqslant 2$ on a $\frac{1}{(k+1)^3} \leqslant \displaystyle\int_k^{k+1}\frac{dt}{t^3} \leqslant \frac{1}{k^3}$ car la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^3}$ décroît sur $[k, k+1]$.

On en déduit à l'aide de la relation de Chasles en sommant de $k=n$ à $k=N$ que pour tout $n \leqslant N$:
$$\sum_{k=n}^{N}\frac{1}{(k+1)^3} \leqslant \int_n^{N+1}\frac{dt}{t^3} = \frac{1}{2}(n^{-2} - (N+1)^{-2}) \leqslant \sum_{k=n}^{N}\frac{1}{k^3}$$

ou encore : $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{N+1}\frac{1}{k^3} = -\frac{1}{n^3} + \sum_{k=n}^{N+1}\frac{1}{k^3} \leqslant \frac{1}{2}(n^{-2} - (N+1)^{-2}) \leqslant \sum_{k=n}^{N}\frac{1}{k^3}$

Passant à la limite quand $N \to \infty$, il vient : $\boxed{R_{n-1} - \dfrac{1}{n^3} \leqslant \dfrac{1}{2n^2} \leqslant R_{n-1}}$.

d) Par 5) a),

on a $\dfrac{1}{12}\displaystyle\sum_{k=n}^{N}\frac{1}{(k+1)^3}=\frac{1}{12}\sum_{k=n+1}^{N+1}\frac{1}{k^3}\leqslant\sum_{k=n}^{N}J_k\leqslant\frac{1}{12}\sum_{k=n}^{N}\frac{1}{k^3}$; comme les trois séries intervenant dans l'inégalité sont convergentes, en passant à la limite on a :

$-\dfrac{1}{12}\dfrac{1}{n^3}+\dfrac{1}{12}R_{n-1}\leqslant\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty}J_k\leqslant\frac{1}{12}R_{n-1}$ et donc finalement par la question précédente :

$$\boxed{\frac{1}{24n^2}-\frac{1}{12n^3}\leqslant\sum_{k=n}^{+\infty}J_k\leqslant\frac{1}{24n^2}+\frac{1}{12n^3}}$$

• Ainsi : $\dfrac{1}{24}-\dfrac{1}{12n}\leqslant n^2\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty}J_k\leqslant\frac{1}{24}+\frac{1}{12n}$ et donc par le théorème d'encadrement, $\left(n^2\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty}J_k\right)$ converge vers $\dfrac{1}{24}$, finalement : $\boxed{\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty}J_k\sim\frac{1}{24n^2}}$.

e) Ceci se traduit par : $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty}J_k=\frac{1}{24n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

On a ainsi : $S=\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}J_k+\sum_{k=n}^{+\infty}J_k=\sum_{k=0}^{n-1}J_k+\frac{1}{24n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Ainsi, par 4)b) appliqué à f définie au début de 5) :

$$\sum_{k=1}^{n-1}J_k=S-\frac{1}{24n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)=\frac{\frac{-1}{n^2}-(-1)}{8}+\frac{1+\frac{1}{n}}{2}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}+\int_1^n\frac{dt}{t}$$

d'où : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\ln n-\ln 1\underbrace{-S+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}}_{=\beta}+\frac{1}{2n}+\left(\frac{1}{24}-\frac{1}{8}\right)\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

Ainsi $\qquad H_n=\ln(n)+\beta+\frac{1}{2n}-\frac{1}{12n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

D'où : $u_n=\beta+\frac{1}{2n}-\frac{1}{12n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ tend vers β quand n tend vers $+\infty$.

Or par 3) b), (u_n) converge vers γ ; par unicité de la limite, $\beta=\gamma$.