

Exercice I

Dans tout cet exercice, n désigne un entier naturel non nul.

Soit $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou \mathbf{C} . Soit E un \mathbf{K} -espace vectoriel de dimension n .

On considère G un sous-groupe du groupe $(\mathrm{GL}(E), \circ)$ tel que pour tout $u \in G$, $u^2 = \mathrm{id}_E$.

- 1) Montrer que pour tout $(u, v) \in G^2$, $u \circ v = v \circ u$.
- 2) Soit $u \in G$. Que dire du spectre u ? Justifier que u est diagonalisable.
- 3) Soit u et v deux éléments de G .
 - a) Montrer que les espaces propres $E_1(u) = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}_E)$ et $E_{-1}(u) = \mathrm{Ker}(u + \mathrm{id}_E)$ sont stables par v .
 - b) En déduire qu'il existe une base \mathcal{B} telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v)$ sont diagonales.
On pourra considérer les endomorphismes induits par v sur $E_1(u)$ et $E_{-1}(u)$.
- 4) Soit r un entier naturel non nul et u_1, \dots, u_r des éléments de G . Montrer qu'il existe une base \mathcal{B} telle que pour tout i compris entre 1 et r , $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u_i)$ est diagonale.
- 5) En déduire que G est fini et que $\mathrm{Card}(G) \leq 2^n$.
- 6) Montrer que si p et q sont deux entiers non nuls distincts, les groupes $(\mathrm{GL}_p(\mathbf{K}), \times)$ et $(\mathrm{GL}_q(\mathbf{K}), \times)$ ne sont pas isomorphes, c'est-à-dire qu'il n'existe pas d'isomorphisme entre les deux groupes.

Exercice II

Dans tout cet exercice n désigne un entier naturel non nul.

Soit σ une permutation de S_n , on note $P_\sigma \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ la matrice définie par

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, (P_\sigma)[i, j] = \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma(j) = i \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On considère $f_\sigma : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ l'endomorphisme canoniquement associé à P_σ . On notera (e_1, \dots, e_n) la base canonique de \mathbf{R}^n .

- 1) Soit $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, déterminer $f_\sigma(e_j)$.
- 2) En déduire que pour σ, σ' dans S_n , $P_{\sigma \circ \sigma'} = P_\sigma P_{\sigma'}$ puis que $(P_\sigma)^{-1} = P_{\sigma^{-1}}$.

Soit σ, σ' deux permutations de S_n . Elles sont dites conjuguées s'il existe une permutation τ telle que $\sigma' = \tau \circ \sigma \circ \tau^{-1}$.

- 3) Montrer que si σ et σ' sont conjuguées alors P_σ et $P_{\sigma'}$ sont semblables.
- 4) Réciproquement, soit σ et σ' deux permutations telles que P_σ et $P_{\sigma'}$ soient semblables. Pour tout entier k compris entre 2 et n , on note $c_k(\sigma)$ (resp. $c_k(\sigma')$) le nombre de k -cycles dans la décomposition de σ (resp. de σ') en cycles à supports disjoints, et on note $c_1(\sigma)$ (resp. $c_1(\sigma')$) le nombre de points fixes de σ (resp. de σ').

a) Montrer que $\chi_{P_\sigma} = \prod_{k=1}^n (X^k - 1)^{c_k(\sigma)}$. On pourra montrer que P_σ est semblable à une matrice diagonale par blocs d'une forme intéressante.

b) Soit $m \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Montrer que $\sum_{m|k} c_k(\sigma) = \sum_{m|k} c_k(\sigma')$.

On pourra considérer l'ordre de multiplicité d'un nombre complexe bien choisi.

c) En déduire que

$$\forall m \in \llbracket 1, n \rrbracket, c_m(\sigma) = c_m(\sigma')$$

d) Soit $\gamma = (a_1, \dots, a_p)$ et $\tau \in S_n$. Calculer $\tau \circ \gamma \circ \tau^{-1}$.

e) En déduire que σ et σ' sont conjuguées.