

Notations :

Pour $p \in \mathbb{C}^n$, D_p est la matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont ceux de p .

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\text{Sp}(A)$ désigne le spectre de A , c'est-à-dire l'ensemble des valeurs propres de A . On note alors $\rho(A) = \max \{|\lambda|; \lambda \in \text{Sp}(A)\}$. On notera encore A l'endomorphisme de \mathbb{C}^n canoniquement associé à A .

Partie I

Dans cette partie, on munit \mathbb{C}^n de la norme $\|\cdot\|_\infty$ soit $\|z\|_\infty = \max_{j=1,\dots,n} |z_j|$.

On définit l'application

$$N_\infty : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$A \mapsto N_\infty(A) = \max_{i=1,\dots,n} \sum_{j \in [1,n]} |a_{i,j}|$$

- 1) Montrer que $A \mapsto N_\infty(A)$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
- 2) a) Montrer que $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \forall z \in \mathbb{C}^n : \|A(z)\|_\infty \leq N_\infty(A) \|z\|_\infty$.
 b) Montrer l'égalité : $N_\infty(A) = \max_{z \in (\mathbb{C}^n \setminus \{0\})} \frac{\|A(z)\|_\infty}{\|z\|_\infty}$.
 c) Montrer que $\rho(A) \leq N_\infty(A)$.
- 3) Montrer que N_∞ est une norme matricielle c'est-à-dire qu'elle vérifie :

$$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), N_\infty(AB) \leq N_\infty(A) N_\infty(B).$$

- 4) Soit $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice inversible. On définit

$$N_Q : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$A \mapsto N_\infty(Q^{-1}AQ).$$

- a) Vérifier que N_Q est une norme matricielle sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
- b) Montrer qu'il existe une constante C_Q telle que

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \quad \frac{1}{C_Q} N_\infty(A) \leq N_Q(A) \leq C_Q N_\infty(A).$$
- 5) a) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Soit $p = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{C}^n$. On suppose que les p_i sont tous non nuls. Exprimer les coefficients de $D_p^{-1}AD$ en fonction de ceux de A .
 b) Soit $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice triangulaire supérieure et $\varepsilon > 0$ donné. Montrer que l'on peut choisir une matrice diagonale $D_S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ avec $S = (s, s^2, s^3, \dots, s^n) \in \mathbb{C}^n$ où s est un réel strictement positif telle que : $N_{D_S}(T) < \rho(T) + \varepsilon$.
 c) Étant donné $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\varepsilon > 0$, montrer qu'il existe une norme matricielle N_ε telle que $N_\varepsilon(A) < \rho(A) + \varepsilon$.
- 6) En déduire l'équivalence : $\lim_{k \rightarrow \infty} A^k = 0 \Leftrightarrow \rho(A) < 1$.

Partie II

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ fixée ; pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ on pose : $L_i = \sum_{\substack{j \in \llbracket 1, n \rrbracket \\ j \neq i}} |a_{ij}|$ et $C_j = \sum_{\substack{i \in \llbracket 1, n \rrbracket \\ i \neq j}} |a_{ij}|$.

On définit les sous-ensembles du plan complexe :

$$G_L(A) = \bigcup_{i=1}^n D_i(A) \text{ où } D_i(A) = \{z \in \mathbb{C}, |z - a_{ii}| \leq L_i\}$$

$$G_C(A) = \bigcup_{j=1}^n D'_j(A) \text{ où } D'_j(A) = \{z \in \mathbb{C}, |z - a_{jj}| \leq C_j\}$$

On désigne par $C_i(A)$ le cercle bordant le disque $D_i(A)$.

7) Soit $A = \begin{pmatrix} 4 + 3i & i & 2 & -1 \\ i & -1 + i & 0 & 0 \\ 1 + i & -i & 5 + 6i & 2i \\ 1 & -2i & 2i & -5 - 5i \end{pmatrix}$.

Représenter dans le plan complexe $G_L(A)$ et $G_C(A)$.

8) On se propose de montrer l'inclusion $\text{Sp}(A) \subset G_L(A) \cap G_C(A)$.

a) Soit $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que le système linéaire $MZ = 0$ a une solution non nulle.

Montrer que : $\exists p \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad |m_{pp}| \leq L_p$.

b) Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\lambda \in \text{Sp}(A)$.

En utilisant la question précédente, montrer que $\lambda \in G_L(A)$.

c) Conclure en justifiant l'inclusion $\text{Sp}(A) \subset G_C(A)$.

9) Soit $p \in \mathbb{R}^n$. On note $p > 0$ lorsque $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ et $p_j > 0$ pour $j = 1, 2, \dots, n$. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et D_p matrice diagonale avec $p > 0$. Déterminer $G_L(D^{-1}AD)$.

10) a) Dédurre de 8) et 9) l'inégalité

$$\rho(A) \leq \inf_{p > 0} \left(\max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \frac{1}{p_i} \sum_{j=1}^n p_j |a_{i,j}| \right).$$

b) Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 7 & -16 & 8 \\ -16 & 7 & -8 \\ 8 & -8 & -5 \end{pmatrix}$.

- i) Montrer que le majorant de $\rho(A)$ donné par 10.a) est supérieur ou égal à $\frac{83}{3}$.
- ii) Donner une valeur approchée de $\rho(A)$ (on pourra utiliser la calculatrice).