Introduction

Dans ce sujet, une série de fonctions L_a est une série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} a_n \frac{x^n}{1-x^n}$ où $(a_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de réels telle que la série entière $\sum_{n\geqslant 1} a_n x^n$ soit de rayon 1.

Partie I - Propriétés

Soit une série de fonctions L_a : $\sum_{n\geqslant 1} a_n \frac{x^n}{1-x^n}$

1) Soit $x \in]-1,1[$, donner un équivalent de $1-x^n$ pour n au voisinage de $+\infty$.
   Démontrer que pour tout $x \in]-1,1[$, la série $\sum_{n\geqslant 1} a_n \frac{x^n}{1-x^n}$ converge absolument.
   Donner un exemple de suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ telle que la série L_a converge en au moins un point x_0 n'appartenant pas à l'intervalle $]-1,1[$.
2) Démontrer que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} a_n \frac{x^n}{1-x^n}$ converge uniformément sur tout segment $[-b,b]$ inclus dans l'intervalle $]-1,1[$.
3) On pose, pour tout $x \in]-1,1[$, $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{x^n}{1-x^n}$.
   Justifier que la fonction f est continue sur l'intervalle $]-1,1[$ et démontrer ensuite que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle $]-1,1[$. Donner la valeur de $f'(0)$.
4) Expression sous forme de série entière.
   On note $A = \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$.
   Lorsque $(u_{n,p})_{(n,p)\in A}$ est une famille sommable de réels, justifier que
   $$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{p=1}^{+\infty} u_{n,p}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{(k,p)\in I_n} u_{k,p}\right) \text{ où } I_n = \{(k,p)\in A, kp = n\}.$$
   Démontrer que pour tout $x \in]-1,1[$, la famille $(a_n x^{np})_{(n,p)\in A}$ est sommable.
   En déduire que pour tout $x \in]-1,1[$, $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{x^n}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n x^n$ où $b_n = \sum_{d|n} a_d$.
   ($d|n$ signifiant d divise n).

Partie II - Exemples

5) Dans cette question, pour $n \geqslant 1$, $a_n = 1$ et on note d_n le nombre de diviseurs de n. Exprimer pour $x \in]-1,1[$, $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{x^n}{1-x^n}$ comme la somme d'une série entière.
6) Pour tout entier naturel non nul n, on note $A_n = \{u \in [\![1,n]\!]\ ,\ u \wedge n = 1\}$ l'ensemble des entiers naturels non nuls, inférieurs ou égaux à n et qui sont premiers avec n. On note alors $\varphi(n)$ le cardinal de A_n.
   a) Justifier que si k, a, b sont des entiers naturels, $(ka)\wedge(kb) = k(a\wedge b)$.
   b) Pour $n \geqslant 1$ et d un diviseur de n, montrer que $x \mapsto dx$ est une bijection de $A_{\frac{n}{d}}$ sur l'ensemble $\{u \in [\![1,n]\!]\ ,\ u \wedge n = d\}$.

c) En déduire que pour $n \geqslant 1, n = \sum_{d|n} \varphi(d)$.

d) Justifier que la série entière $\sum_{n \geqslant 1} \varphi(n) x^n$ est de rayon 1.

Pour $x \in]-1,1[$, exprimer $\sum_{n=1}^{+\infty} \varphi(n) \frac{x^n}{1-x^n}$ sous forme d'un quotient de deux polynômes.

7) En utilisant le théorème de la double limite ou du théorème d'Abel radial, établir à l'aide du développement en série entière de la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ sur l'intervalle $]-1,1[$, la valeur de la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.

8) Dans cette question et la suivante, pour $n \geqslant 1$, $a_n = (-1)^n$ et pour tout $x \in]-1,1[$,
$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{x^n}{1-x^n}$.

En utilisant le théorème de la double limite calculer $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x}$ et donner un équivalent de $f(x)$ au voisinage de 0. Retrouver le dernier résultat de la question 3)

9) Démontrer qu'au voisinage de 1, $f(x) \sim \frac{-\ln 2}{1-x}$.

On pourra remarquer que pour $x \in]0,1[$, $\frac{1-x}{1-x^n} = \frac{1}{1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}}$.