On note

$$h : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^2 & \to & \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \\ (z,w) & \to & \begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix} \end{array}$$

$$E = h(1,0), I = h(i,0), J = h(0,1), K = h(0,i)$$

On pose

$$\mathbb{H} = \{h(z,w),\ (z,w) \in \mathbb{C}^2\}$$

On appelle quaternions les éléments de $\mathbb{H}$.

1) Soient (z_1, w_1) et (z_2, w_2) deux éléments de $\mathbb{C}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$h\big(\lambda(z_1,w_1) + (z_2,w_2)\big) = \begin{pmatrix} \lambda z_1 + z_2 & \lambda w_1 + w_2 \\ -\overline{\lambda w_1 + w_2} & \overline{\lambda z_1 + z_2} \end{pmatrix} = \lambda h(z_1,w_1) + h(z_2,w_2)$$

car la conjugaison est $\mathbb{R}$-linéaire.

Donc h est $\mathbb{R}$-linéaire. Comme $\mathbb{H} = Im(h)$, $\mathbb{H}$ est un $\mathbb{R}$-sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

Soit $(z,w) \in \ker(h)$. Comme la première ligne de $h(z,w)$ est nulle on a $(z,w) = (0,0) = 0_{\mathbb{C}^2}$. Donc h est injective.

Ainsi h induit un $\mathbb{R}$-isomorphisme de $\mathbb{C}^2$ vers $\mathbb{H}$.

Comme $((1,0),(i,0),(0,1),(0,i))$ est une $\mathbb{R}$-base de $\mathbb{C}^2$, son image (E,I,J,K) est une $\mathbb{R}$-base de $\mathbb{H}$.

Vérifier que h est $\mathbb{R}$-linéaire et injective. En déduire que $\mathcal{H}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et que (E,I,J,K) en est une base.

2)

$$IJK = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = -E$$

On vient de montrer plus haut que $IJ = K$. Un calcul direct montre que $JI = -K$. On peut aussi remarquer que puisque $I^2 = -E$, I est inversible et $I^{-1} = -I$. Idem pour J et pour K. Ainsi

$$JI = (-J^{-1})(-I^{-1}) = (IJ)^{-1} = K^{-1} = -K$$

$\curvearrowright$	E	I	J	K
E	E	I	J	K
I	I	$-E$	K	$-J$
J	J	$-K$	$-E$	I
K	K	J	$-I$	$-E$

3) La table précédente montre que tout produit à facteurs parmi E, I, J, K est un quaternion.

Or tout quaternion est combinaison $\mathbb{R}$-linéaire de (E,I,J,K), donc tout produit de quaternions est combinaison $\mathbb{R}$-linéaire de $EE, EI, \ldots, KJ, KK$ donc est un quaternion (car $\mathbb{H}$ est un sous-$\mathbb{R}$-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$).

Enfin $\mathbb{H}$ contient E qui est l'unité de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

Donc $\mathbb{H}$ est une $\boxed{\text{sous-}\mathbb{R}\text{-algèbre de } \mathcal{M}_2(\mathbb{C})}$.

Soit $Q = aE + bI + cJ + dK$ (avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$) un quaternion qui commute avec tous les quaternions.

Comme $IQ = QI$ on a :

$$aI - bE + cK - dJ = aI - bE - cK + dJ$$

Comme (E, I, J, K) est $\mathbb{R}$-libre on en déduit que $c = -c$ et $-d = d$ donc $2c = 2d = 0$ et ainsi $c = d = 0$ (car $2 \neq 0$ et $\mathbb{R}$ est intègre).
Comme $JQ = QJ$ on a :

$$aJ - bK - cE + dI = aJ + bK - cE - dI$$

et on en déduit de même que $b = d = 0$.
Donc Q est un quaternion réel.
Réciproquement, si Q est un quaternion réel, il commute avec tous les quaternions car E commute avec I, J et K.
Donc $\boxed{\text{le centre de } \mathbb{H} \text{ est la } \mathbb{R}\text{-droite des quaternions réels.}}$

4) Soient $z, z' \in \mathbb{C}$ et $Q, Q' \in \mathbb{H}$.

$$\begin{aligned} (z + z') \times Q &= h(z + z', 0)Q = h((z, 0) + (z', 0))Q = (h(z, 0) + h(z', 0))Q \\ &= h(z, 0)Q + h(z', 0)Q = (z \times Q) + (z' \times Q) \end{aligned}$$

par $\mathbb{R}$-linéarité de h et $\mathbb{C}$-linéarité à gauche du produit matriciel.

$$z \times (Q + Q') = h(z, 0)(Q + Q') = h(z, 0)Q + h(z, 0)Q'$$

par $\mathbb{C}$-linéarité à droite du produit matriciel.

$$z \times (z' \times Q) = \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & \bar{z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z' & 0 \\ 0 & \bar{z}' \end{pmatrix} Q = \begin{pmatrix} zz' & 0 \\ 0 & \bar{z}\bar{z}' \end{pmatrix} Q = h(zz', 0)Q = (zz') \times Q$$

$$1 \times Q = EQ = Q$$

Donc $\boxed{(\mathbb{H}, +, \times) \text{ est un } \mathbb{C} \text{ espace vectoriel}}$.
De plus pour tous $z, w \in \mathbb{C}$,

$$z \times E + w \times J = \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & \bar{z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w & 0 \\ 0 & \bar{w} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = h(z, w)$$

donc (E, J) est $\mathbb{C}$-génératrice de $\mathbb{H}$. De plus

$$z \times E + w \times J = 0_{\mathbb{H}} \Leftrightarrow h(z, w) = 0_{\mathbb{H}} \Leftrightarrow (z, w) = (0_{\mathbb{C}}, 0_{\mathbb{C}})$$

car h est injective. Donc (E, J) est $\mathbb{C}$-libre. $\boxed{\text{C'est donc une } \mathbb{C}\text{-base de } (\mathbb{H}, +, \times)}$.
Soit $z \in \mathbb{C}$

$$J(z \times E) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & \bar{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \bar{z} \\ -z & 0 \end{pmatrix} = (\bar{z} \times E)J$$

Remarque : on a donc $J(z \times E) = h(\bar{z}, 0)J = h(\bar{z}, 0)EJ = \bar{z} \times (EJ) \neq z \times (EJ)$ si $\bar{z}$ est un complexe imaginaire (non réel). Donc $(\mathbb{H}, +, \times, .)$ n'est pas une $\mathbb{C}$-algèbre puisque le produit matriciel n'est pas $\mathbb{C}$-linéaire à droite.

5) Soit Q un quaternion.

a) Soient $\lambda \in \mathbb{C}$ et $Q_1, Q_2 \in \mathbb{H}$.

$$\begin{aligned} d_Q(\lambda \times Q_1 + Q_2) &= (\lambda \times Q_1 + Q_2)Q = (h(\lambda,0)Q_1 + Q_2)Q \\ &= h(\lambda,0)Q_1Q + Q_2Q = \lambda \times (Q_1Q) + (Q_2Q) = \lambda \times d_Q(Q_1) + d_Q(Q_2) \end{aligned}$$

Donc d_Q est $\mathbb{C}$-linéaire (au sens de $\times$).
Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ tels que $Q = \lambda \times E + \mu \times J$. Alors $d_Q(E) = Q = \lambda \times E + \mu \times J$ et

$$d_Q(J) = J(\lambda \times E) + J(\mu \times J) = \bar{\lambda} \times J + J(\mu \times E)J = \bar{\lambda} \times J + (\bar{\mu} \times E)JJ = -\bar{\mu} \times E + \bar{\lambda} \times J$$

Donc $\boxed{Mat_{(E,J)}(d_Q) = \begin{pmatrix} \lambda & -\bar{\mu} \\ \mu & \bar{\lambda} \end{pmatrix}}$.

b) Soient $f \in F$. Soient $z_1, \ldots, z_n$ les coordonnées de f dans la $\mathbb{C}$-base $(e_1, \ldots, e_n)$.
Soient $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$.
f est égal à $x_1e_1 + \ldots + x_ne_n + y_1(ie_1) + \ldots + y_n(ie_n) = (x_1 + iy_1)e_1 + \ldots + (x_n + iy_n)e_n$ si et seulement si $x_1 + iy_1 = z_1, \ldots, x_n + iy_n = z_n$ c'est-à-dire $x_1 = Re(z_1), \ldots, y_n = Im(z_n)$. Ainsi tout vecteur de E s'écrit de manière unique comme combinaison $\mathbb{R}$-linéaire de $(e_1, \ldots, ie_n)$, ce qui prouve que cette famille est une $\mathbb{R}$-base de F.
De plus si $Mat_{\mathcal{B}}(f) = Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$ alors $Mat_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ avec $X = \begin{pmatrix} Re(z_1) \\ \vdots \\ Re(z_n) \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} Im(z_1) \\ \vdots \\ Im(z_n) \end{pmatrix}$.

$$Mat_{\mathcal{B}}(u(f)) = MZ = (A + iB)Z = (A + iB)(X + iY) = X' + iY'$$

avec $X' = AX - BY$ et $Y' = BX + AY$, c'est-à-dire

$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

Ceci valant pour tout vecteur f de F, on a :

$$\boxed{Mat_{\mathcal{B}'}(u) = \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}}$$

On a donc

$$\begin{aligned}
\det_{\mathbb{R}}(u) &= \begin{vmatrix} A & -B \\ B & A \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} A+iB & -B+iA \\ B & A \end{vmatrix} \\
&\quad \text{car } L_1 \to L_1 + iL_2 \text{ correspond à une multiplication à gauche par } \begin{pmatrix} I_n & iI_n \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \\
&\quad \text{dont le déterminant est 1} \\
&= \begin{vmatrix} A+iB & 0 \\ 0 & I_n \end{vmatrix} \begin{vmatrix} I_n & iI_n \\ B & A \end{vmatrix} \\
&= det(A+iB) \begin{vmatrix} I_n & 0 \\ B & A-iB \end{vmatrix} \\
&\quad \text{car } C_2 \to C_2 - iC_1 \text{ correspond à une multiplication à droite par } \begin{pmatrix} I_n & -iI_n \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \\
&\quad \text{dont le déterminant est 1} \\
&= \det(A+iB)\det(A-iB) \\
&= |\det(A+iB)|^2 = \boxed{|det_{\mathbb{C}}(u)|^2}
\end{aligned}$$

car la formule $\det(M) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^n m_{\sigma(j),j}$ montre que deux matrices conjuguées ont des déterminants conjugués.

c)

$$\det_{\mathbb{R}}(d_Q) = |\det_{\mathbb{C}}(d_Q)|^2 = \left|\det \begin{pmatrix} \lambda & -\bar{\mu} \\ \mu & \bar{\lambda} \end{pmatrix}\right|^2 = \left||\lambda|^2 + |\mu|^2\right|^2 = \boxed{\left(|\lambda|^2 + |\mu|^2\right)^2 = ||Q||^4}$$

(en anticipant sur la définition de $||.||$)

6) Posons $\boxed{z * Q = Qh(z,0)}$ pour tout $z \in \mathbb{C}$ et tout $Q \in \mathbb{H}$.
On montre de même qu'en 5)a) que $(\mathbb{H}, +, *)$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de base (E, J) pour lequel la multiplication à gauche g_Q par Q est un $\mathbb{C}$-endomorphisme.
Remarquons que pour tout complexe z on a $z * J = Jh(z,0) = \bar{z} \times J$.
Dans les notations précédentes,

$$g_Q(E) = Q = \lambda \times E + \mu \times J = \lambda * E + \bar{\mu} * J$$

$$g_Q(J) = QJ = h(\lambda,0)EJ + h(\mu,0)JJ = -\mu * E + \bar{\lambda} J$$

d'où $Mat_{(E,J)}(g_Q) = \begin{pmatrix} \lambda & -\mu \\ \bar{\mu} & \bar{\lambda} \end{pmatrix}$ et on a encore

$$\boxed{\det_{\mathbb{R}}(g_Q) = \left||\lambda|^2 + |\mu|^2\right|^2 = ||Q||^4}$$

7) Remarquons que si $Q = aE + bI + cJ + dK = h(a+ib, c+id)$ avec $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ alors

$$Q^* = \begin{pmatrix} a-ib & -c-id \\ c-id & a+ib \end{pmatrix} = a - bI - cJ - dK$$

Soient $Q_1 = a_1E + b_1I + c_1J + d_1K$ et $Q_2 = a_2E + b_2I + c_2J + d_2K$ avec $a_1, \ldots, d_2 \in \mathbb{R}$.
En utilisant la table de multiplication de la question 2) on a :

$$\begin{aligned}(Q_1|Q_2) &= Re((a_1E - b_1I - c_1J - d_1K)(a_2E + b_2I + c_2J + d_2K)) \\ &= Re((a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 + d_1d_2)E + b'I + c'J + d'K)\end{aligned}$$

avec $b', c', d' \in \mathbb{R}$ d'où

$$(Q_1|Q_2) = a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 + d_1d_2 = \big((a_1, b_1, c_1, d_1)|(a_2, b_2, c_2, d_2)\big)_{can}$$

où $(.|.)$ désigne le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^4$.
On en déduit que $(.|.)$ est un produit scalaire sur $\mathbb{H}$ et que l'application $(a, b, c, d) \mapsto aE + bI + cJ + dK$ réalise un isomorphisme d'espaces euclidiens de $(\mathbb{R}_4, (.|.)_{can})$ vers $(\mathbb{H}, (.|.))$.
On en déduit que (E, I, J, K) est une base orthonormale pour ce produit scalaire, car la base canonique de $\mathbb{R}^4$ est orthonormale pour $(.|.)_{can}$ et est transformée en (E, I, J, K) par l'isomorphisme précédent.
L'orthogonal de la $\mathbb{R}$-droite $Vect(E)$ des quaternions réels est donc $\boxed{\text{l'hyperplan } Vect(I, J, K) \text{ des quaternions purs}}$.
Soit $Q \in \mathbb{H}$ et $z, w \in \mathbb{C}$ tels que $Q = h(z, w)$.

$$Q^*Q = \begin{pmatrix} \bar{z} & -w \\ \bar{w} & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix} = (|z|^2 + |w|^2)E = \boxed{||Q||^2E}$$

Si Q est non nul alors $||Q|| \neq 0$ (car $||.||$ est une norme), donc $(\frac{1}{||Q||^2}Q^*)Q = E$. Ainsi Q est inversible et $\boxed{Q^{-1} = \frac{1}{||Q||^2}Q^*}$.
Soient $Q_1, Q_2 \in \mathbb{H}$. Remarquons que $(Q_1Q_2)^* = (\bar{Q}_1\bar{Q}_2)^T = \bar{Q}_2^T\bar{Q}_1^T = Q_2^*Q_1^*$, donc

$$\begin{aligned}||Q_1Q_2|| &= \sqrt{Re(Q_2^*Q_1^*Q_1Q_2)} = \sqrt{Re(Q_2^*||Q_1||^2EQ_2)} = \sqrt{Re(||Q_1||^2Q_2^*Q_2)} \\ &= \sqrt{Re(||Q_1||^2||Q_2||^2E)} = \sqrt{||Q_1||^2||Q_2||^2} = ||Q_1||.||Q_2||\end{aligned}$$

8) Soit Q un quaternion non nul.

a) Remarquons que $c_Q = g_Q \circ d_{Q^{-1}}$.
Comme q_Q et g_Q sont $\mathbb{R}$-linéaires, il en va de même pour c_Q.
De plus pour tout $\mathbb{Q}' \in \mathbb{H}$,

$$||c_Q(Q')|| = ||Q||.||Q'||.||Q^{-1}|| = ||QQ^{-1}||.||Q'|| = ||E||.||Q'|| = ||Q'||$$

car $||E||^2 = Re(E^*E) = Re(E^2) = Re(E) = 1$.
Donc c_Q est une isométrie vectorielle de $\mathbb{H}$.
Enfin d'après la question 5) ,

$$\det_{\mathbb{R}}(c_Q) = \det_{\mathbb{R}}(g_Q)\det_{\mathbb{R}}(d_{Q^{-1}}) = ||Q||^4.||Q^{-1}||^4 = ||E||^4 = 1$$

Donc c_Q est directe.

b) $c_Q(E) = E$, donc la $\mathbb{R}$-droite des quaternions réels est stable par c_Q.
Comme c_Q est une isométrie vectorielle, l'orthogonal de cette droite est stable par c_Q. Or cet orthogonal est $Vect(I, J, K)$ car (E, I, J, K) est une base orthonormale de $\mathbb{H}$.
Ainsi $\boxed{\text{le } \mathbb{R}\text{-hyperplan } P \text{ des quaternions purs est stable par } c_Q}$.
Comme c_Q est une isométrie vectorielle de $\mathbb{H}$, $\check{c}_Q$ est une $\boxed{\text{isométrie vectorielle de } P}$.
De plus $1 = \det_{\mathbb{R}}(c_Q) = \det_{\mathbb{R}}(\check{c}_Q)\det_{\mathbb{R}}(id_{\mathbb{R}E} = \det_{\mathbb{R}}(\check{c}_Q)$ car c_Q induit l'identité sur $\mathbb{R}E$.
Donc $\check{c}_Q$ est $\boxed{\text{directe}}$.

9) Pour tous $Q_1, Q_2 \in \mathbb{H} \setminus \{0\}$ on a :

$$\forall Q \in P \quad \check{c}_{Q_1}(\check{c}_{Q_2}(Q)) = Q_1 Q_2 Q Q_2^{-1} Q_1^{-1} = (Q_1 Q_2) Q (Q_1 Q_2)^{-1}$$

donc $\check{c}_{Q_1} \circ \check{c}_{Q_2} = \check{c}_{Q_1 Q_2}$.

Ainsi φ est un $\boxed{\text{morphisme de groupes}}$ de $(\mathbb{H} \setminus \{0\}, .)$ vers $(SO(P), \circ)$.

Soit $Q \in \ker(\varphi)$. Alors pour tout $Q' \in P$, $QQ'Q^{-1} = id_P(Q') = Q'$ donc $QQ' = Q'Q$.

De plus Q commute avec tous les quaternions réels (qui sont dans le centre de $\mathbb{H}$).

Par bilinéairté du produit matriciel, Q avec tous les quaternions car $\mathbb{R}E + P = \mathbb{H}$.

Donc Q appartient au centre de $\mathbb{H}$ donc est un quaternion réel.

Réciproquement, si Q est un quaternion réel non nul alors il commute avec tous les éléments de $\mathbb{H}$, donc avec tout quaternion de P donc $\check{c}_Q = id_{\mathbb{P}}$.

Donc $\boxed{\ker(\varphi) \text{ est l'ensemble des quaternions réels non nuls}}$.

10) Soit Q un quaternion pur non nul.

$c_Q(Q) = Q$. Comme $\check{c}_Q$ est une rotation vectorielle (car c'est une isométrie vectorielle directe de P qui est de dimension 3), c'est une rotation d'axe $Vect(Q)$.

$\check{c}_Q^2 = \check{c}_{Q^2}$ car φ est un morphisme de groupes.

Or Q est un quaternion pur donc $Q^* = -Q$ et ainsi

$$Q^2 = -Q^* Q = -||Q||^2 E$$

Donc Q^2 est un quaternion réel. D'après la question précédente, $\boxed{\check{C}_Q^2 = id_P}$.

Donc $\check{c}_Q$ est une symétrie vectorielle. Etant une isométrie directe, c'est une symétrie orthogonale par rapport à un sous-espace F dont la dimension d vérifie :

$$1 = \det_{\mathbb{R}}(c_Q) = (-1)^{\dim(F^\perp} = (-1)^{3-d}$$

où $F^\perp$ désigne l'orthogonal de F dans P.

Ainsi d est impair donc $\check{c}_Q$ est un demi-tour ou l'identité de P.

Ce dernier cas est exclu car Q est un quaternion pur non nul donc n'est pas un quaternion réel donc Q n'appartient pas au noyau de $\ker \varphi$. Donc $\check{c}_Q$ est un demi-tour.

Comme Q est point fixe non nul de $\check{c}_Q$, $\boxed{\check{c}_Q \text{ est le demi-tour d'axe } Vect(Q)}$.

11) Soit r une rotation d'un espace euclidien F de dimension 3.

Soit D un axe de r (unique si $r \neq id_F$).

Alors le plan $D^\perp$ est stable par r et l'endomorphisme $\check{r}$ de $D^\perp$ induit par r est une rotation plane.

Il existe alors des droites vectorielles Δ et Δ' de $D^\perp$ telles que $\check{r} = s_{\Delta'} \circ s_\Delta$, où s_Δ désigne la réflexion de $D^\perp$ par rapport à Δ.

Notons ρ et ρ' les demi-tours de F d'axes Δ et Δ'.

Alors pour tout vecteur x de D on a $\rho(x) = -x$ car $x \in \Delta^\perp$ (car $\Delta \subset D^\perp$ donc $D \perp\perp\subset \Delta^\perp$).

De même $\rho'(x) = -x$. Ainsi $(\rho' \circ \rho)(x) = -(-x) = x$.

De plus $D^\perp$ est stable par ρ et par ρ', et les endomorphismes de $D^\perp$ induits par ρ et ρ' sont s_Δ et $s_{\Delta'}$. Donc $\rho' \circ \rho$ stabilise $D^\perp$ et l'endomorphisme induit correspondant est $s_{\Delta'} \circ s_\Delta = \check{r}$.

Ainsi $\rho' \circ \rho$ et r coïncident sur D et sur $D^\perp$. Etant linéaires, ils coïncident sur $D + D^\perp = F$.

Donc $\boxed{r \text{ est un produit de deux demi-tours}}$.

Soit $r \in SO(P)$. D'après ce qui précède, r est un produit de deux demi-tours. D'après la question précédente, chacun de ces demi-tours est dans l'image de φ.

Comme cette image est un sous-groupe de $SO(P)$, donc stable par $\circ$, on en déduit que $r \in Im(\varphi)$.

Ainsi $SO(P) \subset Im(\varphi)$, donc $\boxed{\varphi \text{ est surjectif}}$.