On note

$$h \ : \ \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^2 & \to & \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \\ (z,w) & \to & \begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix} \end{array}$$

$$E = h(1,0), I = h(i,0), J = h(0,1), K = h(0,i)$$

On pose

$$\mathbb{H} = \{h(z,w),\ (z,w) \in \mathbb{C}^2\}$$

On appelle quaternions les éléments de $\mathbb{H}$.

1) Vérifier que $h$ est $\mathbb{R}$-linéaire et injective. En déduire que $\mathcal{H}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et que $(E, I, J, K)$ en est une base.
   Si $Q = aE + bI + cJ + dK$ est un quaternion, avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, le réel $a$ est appelé partie réelle de $Q$ et noté $Re(Q)$. Le quaternion $Q$ est appelé un quaternion réel si et seulement si $b = c = d = 0$ et un quaternion pur si et seulement si $a = 0$.
2) Vérifier que $IJK = -E$.
   On a également $I^2 = J^2 = K^2 = -E$ (on ne demande pas les calculs).
   Montrez que $IJ = K$ et $JI = -K$.
   Donnez sans justification écrite tous les produits $xy$ pour $x, y \in \{E, I, J, K\}$ sous forme d'une table de multiplication (en précisant le sens de l'opération à l'aide d'une petite flèche dans le coin supérieur gauche).
3) Montrer que $\mathbb{H}$ est une $\mathbb{R}$-sous-algèbre de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Déterminer le centre de $\mathbb{H}$, c'est-à-dire l'ensemble des quaternions qui commutent avec tous les quaternions.
4) On pose pour tout $z \in \mathbb{C}$ et tout $Q \in \mathbb{H}$ :

$$z \times Q = h(z,0)Q = \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & \bar{z} \end{pmatrix} Q = (z \times E)Q$$

   Vérifier que $(\mathbb{H}, +, \times)$ est un $\mathbb{C}$ espace vectoriel et que $(E, J)$ en est une base.
   Vérifier également que pour tous $z, w \in \mathbb{C}$

$$J(z \times E) = (\bar{z} \times E)J$$

5) Soit $Q$ un quaternion.
   a) Soit

$$d_Q \ : \ \begin{array}{ccc} \mathbb{H} & \to & \mathbb{H} \\ Q' & \mapsto & Q'Q \end{array}$$

      la multiplication à droite par $Q$.
      Montrer que $d_Q$ est $\mathbb{C}$-linéaire au sens du produit externe $\times$ défini plus haut.
      Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ tels que $Q = \lambda \times E + \mu \times J$.
      Déterminer la matrice de $d_Q$ dans la base $(E, J)$.
   b) Soit $F$ un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et $u$ un $\mathbb{C}$-endomorphisme de $F$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une $\mathbb{C}$-base de $F$.
      On note $Mat_{\mathcal{B}}(u) = M = A + iB$ avec $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
      $F$ hérite naturellement d'une structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $u$ est aussi un endomorphisme de ce $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Montrer que $\mathcal{B}' = (e_1, \ldots, e_n, ie_1, \ldots, ie_n)$ est une $\mathbb{R}$-base de $F$ . Ecrire $Mat_{\mathcal{B}'}(u)$ à l'aide de $A$ et $B$ et d'une notation par blocs.

En déduire que $\det_{\mathbb{R}}(u) = |\det_{\mathbb{C}}(u)|^2$, où $\det_{\mathbb{R}}(u)$ (respectivement $\det_{\mathbb{C}}(u)$) désigne le déterminant de $u$ considéré comme un $\mathbb{R}$-endomorphisme (respectivement $\mathbb{C}$-endomorphisme).

On pourra utiliser des opérations élémentaires à coefficients complexes sur les "métalignes" ou "métacolonnes" de la matrice précédente, qu'on pourra interpréter comme des multiplications à gauche ou à droite par des matrices écrites par blocs.

c) En déduire $\det_{\mathbb{R}}(d_Q)$ en fonction de $\lambda$ et $\mu$ puis de $||Q||$ ($H$ étant muni de sa structure naturelle de $\mathbb{R}$-algèbre donc de $\mathbb{R}$ espace vectoriel)

6) Donner une structure de $\mathbb{C}$-espace vectoriel sur $\mathbb{H}$ pour laquelle la multiplication à gauche $g_Q$ par $Q$ est un $\mathbb{C}$-endomorphisme.

En déduire $\det_{\mathbb{R}}(g_Q)$.

7) On appelle conjuqué d'un quaternion $Q = z \times E + w \times J$ le quaternion $Q^* = \bar{Q}^T = \bar{z} \times E - w \times J$.

Montrer que $(Q_1, Q_2) \mapsto (Q_1|Q_2) = Re(Q_1^* Q_2)$ est un produit scalaire sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{H}$. On note $||.||$ la norme euclidienne associée.

Déterminer l'orthogonal de la droite des quaternions réels.

Pour tout $Q \in \mathbb{H}$, montrer que $Q^*Q$ est un quaternion réel positif (c'est-à-dire de la forme $\alpha E$ avec $\alpha \in \mathbb{R}^+$).

Si $Q$ est non nul, montrer que $Q$ est inversible et exprimer son inverse à l'aide de $Q^*$ et $||Q||$.

Montrer également que

$$\forall Q_1, Q_2 \in \mathbb{H} \quad ||Q_1 Q_2|| = ||Q_1||.||Q_2||$$

8) Soit $Q$ un quaternion non nul.

a) Montrer que la conjugaison par $Q$ :

$$c_Q \quad : \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{H} & \to & \mathbb{H} \\ Q' & \mapsto & QQ'Q^{-1} \end{array}$$

est $\mathbb{R}$-linéaire, et que c'est une isométrie vectorielle directe de $\mathbb{H}$.

b) Calculer $c_Q(E)$. En déduire que le sous-espace vectoriel $P$ des quaternions purs est stable par $c_Q$. On note $\check{c}_Q$ l'endomorphisme de $P$ induit par $c_Q$. Montrer que $\check{c}_Q$ est une isométrie vectorielle directe de $P$ (muni du produit scalaire induit par celui de $\mathbb{H}$).

9) Montrer que l'application

$$\varphi \quad : \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{H} \setminus \{0_{\mathbb{H}}\} & \to & SO(P) \\ Q & \mapsto & \check{c}_Q \end{array}$$

est un morphisme de groupe et déterminer son noyau.

10) Soit $Q$ un quaternion pur non nul.

Calculer $c_Q(Q)$. En déduire que $\check{c}_Q$ est une rotation d'axe $Vect(Q)$.

Calculer $\check{c}_Q^2$. En déduire que $\check{c}_Q$ est le demi-tour d'axe $Vect(Q)$ (c'est-à-dire la rotation d'angle $\pi$, et aussi la symétrie orthogonale par rapport à $Vect(Q)$).

11) On rappelle que toute rotation plane peut s'écrire comme la composée de deux réflexions.

En déduire que toute rotation d'un espace euclidien de dimension trois peut s'écrire comme la composée de deux demi-tours.

En déduire que $\varphi$ est surjectif.