Partie I - Questions préliminaires

1) La fonction $x \mapsto \ln x$ est une fonction concave sur $\mathbb{R}_+^*$. D'après l'inégalité de Jensen pour $(a_1, \ldots, a_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$:

$$\ln\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} a_i\right) \geqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \ln(a_i)$$

En prenant l'exponentielle,

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i \geqslant \exp\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\ln(a_i)\right) = \prod_{i=1}^{n} \exp\left(\frac{1}{n}\ln(a_i)\right) = \prod_{i=1}^{n} a_i^{\frac{1}{n}} = \left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^{\frac{1}{n}}.$$

2) a) Soit $s \in \mathscr{S}(E)$. Selon le théorème spectral, il existe une base orthonormée de E constituée de vecteurs propres de s : s est diagonalisable en base orthonormée.
Traduction matricielle : si $S \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$, il existe une matrice P orthogonale et une matrice D diagonale telles que $S = PDP^{-1} = PDP^\top$.

b) On considère la matrice S de l'énoncé. On calcule son polynôme caractéristique : $\chi_S(X) = X^2 - \mathrm{Tr}(S)X + \det(S) = X^2$, donc $\mathrm{Sp}(S) = \{0\}$. De ce fait, si S était diagonalisable, elle serait semblable à la matrice nulle, donc elle serait nulle, ce qui est faux.
Ainsi S est symétrique à coefficients complexes sans être diagonalisable.

3) a) Notons $x = \sum_{i=1}^{n} x_i \varepsilon_i$. Alors $s(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \varepsilon_i$. Or la base β est orthonormée, donc $R_s(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2$.

b) Supposons que $x \in S(0,1)$. Alors $1 = \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$.
Ainsi, $R_s(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_n x_i^2 = \lambda_n$ et $R_s(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 \geqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_1 x_i^2 = \lambda_1$.
On a bien montré que, pour tout $x \in S(0,1)$, $R_s(x) \in [\lambda_1, \lambda_n]$

4) Soient $i, j \in [\![1, n]\!]$. Alors $s_{i,j}$ est la i-ème coordonnée dans la base B du vecteur $s(e_j)$. Comme B est orthonormale, $s_{i,j} = \langle e_i | s(e_j)\rangle$.
En particulier, $s_{i,i} = \langle e_i | s(e_i)\rangle$, or e_i est un vecteur unitaire, donc d'après la question 4.b,
$s_{i,i} = R_s(e_i) \in [\lambda_1, \lambda_n]$.

Partie II - Un maximum sur $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$

5) Les coefficients de $M^\top M - I_n$ sont des fonctions polynomiales des coefficients de M, donc d'après le cours, l'application $M \mapsto M^\top M - I_n$ est continue.

6) D'après le cours, les colonnes de A forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$, donc pour tout $j \in \{1, \cdots, n\}$, $\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}^2 = 1$, ce qui implique : pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$, $|a_{i,j}| \leqslant 1$.

7) Si, pour tout $M = (m_{i,j}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $\|M\|_\infty = \max_{(i,j)\in\{1,\ldots,n\}^2} |m_{i,j}|$, on définit d'après le cours une norme sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, pour laquelle $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ est bornée d'après la question précédente.
De plus, si l'on note f l'application $M \mapsto M^\top M - I_n$ de la question 6, alors $\mathscr{O}_n(\mathbb{R}) = f^{-1}(\{0_{n,n}\})$, or le singleton $\{0_{n,n}\}$ est un fermé et f est continue, donc $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ est un fermé borné de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, or $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie, donc $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ est une partie compacte de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

8) a) D'après la question 2.a, il existe une matrice P orthogonale telle que $S = P\Delta P^{-1} = P\Delta P^\top$.
Ainsi, $T(A) = \mathrm{Tr}([AP\Delta]P^{-1}) = \mathrm{Tr}(P^{-1}[AP\Delta]) = \mathrm{Tr}(B\Delta)$ en posant $B = P^{-1}AP$.
Or A et P sont toutes deux orthogonales et $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ est un groupe multiplicatif, donc B est orthogonale.

b) On vérifie que, pour tout $(C, D) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})^2$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$,
$\mathrm{Tr}((\alpha C + D)S) = \alpha \mathrm{Tr}(CS) + \mathrm{Tr}(DS)$, donc l'application $C \mapsto \mathrm{Tr}(CS)$ est linéaire de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$, or $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie, donc c'est une application continue. Sa restriction T sur $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ est donc aussi continue. Mais $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ est compact, donc T admet un maximum sur $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$.

c) Avec les notations de la question 9.a, $T(A) = \mathrm{Tr}(B\Delta)$, donc en convenant de noter $M_{i,j}$ le (i,j)-ème coefficient d'une matrice M,

$$T(A) = \sum_{i=1}^{n}(B\Delta)_{i,i} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} B_{i,j}\Delta_{j,i},$$

mais Δ est diagonale, donc $T(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i B_{i,i}$.

D'après la question 7, et les λ_i étant positifs, $T(A) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \mathrm{Tr}(S)$.

Ainsi $t \leqslant \mathrm{Tr}(S)$, mais de plus $\mathrm{Tr}(S) = T(I_n)$ et I_n est une matrice orthogonale, donc $t = \mathrm{Tr}(S)$.

Partie III - Inégalité d'Hadamard

9) L'inégalité demandée est une conséquence de la question 1, car on sait que $\det(S) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$ et $\mathrm{Tr}(S) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$.

10) On identifiera $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ avec $\mathbb{R}^n$.
Soit $X \in \mathbb{R}^n$. $X^\top S_\alpha X = (DX)^\top S(DX) \geqslant 0$ car $DX \in \mathbb{R}^n$ et car S est symétrique positive. Ceci montre que $S_\alpha \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$.
$\mathrm{Tr}(S_\alpha) = \sum_{i=1}^{n}(D^\top SD)_{i,i} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{(j,k)\in\{1,\dots,n\}^2} [D^\top]_{i,j} S_{j,k} D_{k,i}$, mais D est diagonale, donc $\mathrm{Tr}(S_\alpha) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 s_{i,i}$.

11) On peut appliquer l'inégalité $(*)$ à la matrice S_α car elle est bien dans $\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$,
or $\det(S_\alpha) = \det(D)^2 \det(S) = \left(\prod_{i=1}^{n} \alpha_{i,i}\right)^2 \det(S)$ et $\frac{1}{n}\mathrm{Tr}(S_\alpha) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{s_{i,i}} s_{i,i} = 1$,
donc $\det(S) \leqslant \left(\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\alpha_{i,i}}\right)^2 = \prod_{i=1}^{n} s_{i,i}$.

12) Pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, $X^\top S_\varepsilon X = X^\top SX + \varepsilon\|X\|^2 \geqslant 0$, donc $S_\varepsilon \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$. De plus d'après la question 5.b, pour tout $i \in \{1,\dots,n\}$, $0 \leqslant \lambda_1 \leqslant s_{i,i}$, donc $s_{i,i} + \varepsilon > 0$, ce qui permet d'appliquer l'inégalité de la question précédente à S_ε : pour tout $\varepsilon > 0$, $\det(S_\varepsilon) \leqslant \prod_{i=1}^{n}(s_{i,i} + \varepsilon)$.
De plus il existe $P \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $S = P\Delta P^{-1}$, où $\Delta = \mathrm{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$, donc $S_\varepsilon = P(\Delta + \varepsilon I_n)P^{-1}$, ce qui prouve que $\det(S_\varepsilon) = \prod_{i=1}^{n}(\lambda_i + \varepsilon)$. Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, $\prod_{i=1}^{n}(\lambda_i + \varepsilon) \leqslant \prod_{i=1}^{n}(s_{i,i} + \varepsilon)$ et on conclut en faisant tendre ε vers 0.

Partie IV - Application de l'inégalité d'Hadamard : détermination d'un minimum

13) Soit $X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. $X^\top BX = (\Omega X)^\top A(\Omega X) > 0$, car $A \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $\Omega X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ (Ω est orthogonale, donc elle est inversible). Ainsi $B \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
De plus Ω est orthogonale, donc d'après le cours, $|\det(\Omega)| = 1$. Or, $\det(A) = 1$, donc $\det(B) = \det(\Omega)^2\det(A) = 1$: on a prouvé que $B \in \mathcal{U}$.
$\mathrm{Tr}(AS) = \mathrm{Tr}([A\Omega\Delta]\Omega^\top) = \mathrm{Tr}(\Omega^\top[A\Omega\Delta]) = \mathrm{Tr}(B\Delta)$.

14) D'après la question précédente, $\{\mathrm{Tr}(AS) \setminus A \in \mathcal{U}\} \subset \{\mathrm{Tr}(B\Delta) \setminus B \in \mathcal{U}\}$.
Réciproquement, soit $B \in \mathcal{U}$. On pose $A = \Omega B\Omega^\top$. En adaptant la démonstration de la question précédente, on montre que $A \in \mathcal{U}$ et que $\mathrm{Tr}(AS) = \mathrm{Tr}(B\Delta)$, donc $\{\mathrm{Tr}(AS) \setminus A \in \mathcal{U}\} = \{\mathrm{Tr}(B\Delta) \setminus B \in \mathcal{U}\}$.
Prenons $x \in \{\mathrm{Tr}(B\Delta) \setminus B \in \mathcal{U}\}$. Il existe $B \in \mathcal{U}$ telle que $x = \mathrm{Tr}(B\Delta) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i B_{i,i}$. Mais $B \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, donc d'après 5.b, pour tout $i \in \{1,\dots,n\}$, $B_{i,i} > 0$. Ainsi $x > 0$. Ceci prouve que $\{\mathrm{Tr}(B\Delta) \setminus B \in \mathcal{U}\}$ est une partie non vide de $\mathbb{R}$ minorée par 0. Elle possède donc une borne inférieure.

15) Par application de l'inégalité arithmético-géométrique,

on obtient $\frac{1}{n}\mathrm{Tr}(B\Delta) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_{i,i} \geqslant \left(\prod_{i=1}^{n} \lambda_i b_{i,i}\right)^{1/n}$, ce qui fournit l'inégalité demandée.

16) Soit $B = (b_{i,j}) \in \mathcal{U}$. D'après la question 11, $\prod_{i=1}^{n} b_{i,i} \geqslant \det(B) = 1$, donc $\left(\prod_{i=1}^{n} b_{i,i}\right)^{1/n} \geqslant 1$.

Ainsi, d'après la question précédente, $\mathrm{Tr}(B\Delta) \geqslant n\left(\prod_{i=1}^{n} \lambda_i\right)^{1/n} = n(\det(S))^{1/n}$.

17) Ainsi $n(\det(S))^{1/n}$ est un minorant de $\{\mathrm{Tr}(B\Delta) \backslash B \in \mathcal{U}\}$, or la borne inférieure est le plus grand des minorants, donc $m \geqslant n(\det(S))^{1/n}$.

Pour tout $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $X^\top D X = \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i^2 > 0$, donc $D \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

De plus $\det(D) = \prod_{i=1}^{n} \mu_i = \frac{\det(S)}{\lambda_1 \cdots \lambda_n} = 1$, donc $D \in \mathcal{U}$. Or $\mathrm{Tr}(D\Delta) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \lambda_i = n(\det(S))^{1/n}$, donc $m = n(\det(S))^{1/n}$.