Dans tout le problème, I est le segment $[0,1]$, f est une fonction réelle définie et continue sur le segment I, p est une fonction définie et continue sur le segment I, positive (pour tout réel x de I, $p(x) \geqslant 0$).
L'objet du problème est l'étude des solutions réelles, définies sur le segment I, deux fois continûment dérivables (de classe $\mathscr{C}^2$) des équations différentielles suivantes :

$$\mathbf{E_0} \quad -u''(x) + p(x)u(x) = 0,$$
$$\mathbf{E} \quad -u''(x) + p(x)u(x) = f(x)$$

vérifiant, en outre, les conditions suivantes aux extrémités du segment I :

$$\mathbf{C} \quad u(0) = 0,\ u(1) = 0.$$

Une fonction u, de classe $\mathscr{C}^2$, définie sur le segment I, vérifiant les conditions $\mathbf{C}$, est dite solution du problème P_0 si elle est solution de l'équation différentielle $\mathbf{E_0}$, respectivement solution du problème P si elle est solution de l'équation différentielle $\mathbf{E}$.
On remarquera que ces problèmes NE SONT PAS DES PROBLÈMES DE CAUCHY.

1) a) **Exemples :**

Déterminer toutes les solutions de l'équation différentielle $\mathbf{E}$ vérifiant les conditions $\mathbf{C}$ dans les deux cas suivants :

i) La fonction p est nulle et la fonction f constante et égale à 1 :
$$p(x) = 0,\ f(x) = 1.$$

ii) La fonction p est constante et égale à 1 ; la fonction f est la fonction $x \mapsto e^{\alpha x}$ où α est un réel donné :
$$p(x) = 1,\ f(x) = e^{\alpha x}.$$

b) **Unicité des solutions :**

i) Soit u une fonction solution de l'équation $\mathbf{E_0}$ vérifiant les conditions $\mathbf{C}$; démontrer que cette solution u vérifie la relation :
$$\int_0^1 \left[u'(x)^2 + p(x)u(x)^2\right] \,\mathrm{d}\,x = 0.$$
En déduire que la seule solution du problème P_0 est la solution nulle.

ii) Démontrer que, pour des fonctions p et f données, le problème P admet au plus une solution.

c) **Existence d'une solution :**

i) Étant données deux fonctions u_1 et u_2 solutions de l'équation différentielle $\mathbf{E_0}$, soit g la fonction définie sur l'intervalle I par la relation suivante :
$$g(x) = u_1(0)u_2(x) - u_2(0)u_1(x).$$
Démontrer que, si la fonction g s'annule au point 1 ($g(1) = 0$), la fonction g est nulle sur l'intervalle I.

En déduire que u_1 et u_2 sont linéairement indépendantes si et seulement si la fonction g ne s'annule pas en 1 ($g(1) \neq 0$).

Soient u_1 et u_2 deux solutions de l'équation différentielle $\mathbf{E_0}$, v une solution de l'équation $\mathbf{E}$ et λ et μ deux scalaires. Soit u et X la fonction et le vecteur définis par les relations suivantes :
$$u(x) = \lambda u_1(x) + \mu u_2(x) + v(x)\,;\ X = \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}.$$

ii) Démontrer que, pour que la fonction u soit solution du problème P, il faut et il suffit que le vecteur X vérifie la relation matricielle suivante :
$$U.X = B,$$
où U est une matrice carrée d'ordre 2 et B un vecteur qui seront précisés.

iii) Démontrer que le problème P admet une solution unique.