Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Dans ce problème on se donne E un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{K}$ et f un endomorphisme de E. On veut étudier les sous-espaces stables de f.

Partie I : Endomorphisme diagonalisable :

Dans cette partie on suppose que f est diagonalisable. On désigne par p le cardinal du spectre de f et on note $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ ses valeurs propres distinctes ainsi que $E_1, \ldots, E_p$ les sous-espaces propres associés.

1) Que dire de f si $p = 1$? En déduire les sous-espaces vectoriels de E stables par f.

On suppose par la suite que $p \geqslant 2$.

2) Pour tout $k \in [\![1\,;\,p]\!]$ on se donne un sous-espace vectoriel F_k de E_k.
   a) Justifier que les sous-espaces vectoriels $F_1, \ldots, F_p$ sont en somme directe.
   b) Montrer que $F = \bigoplus_{i=1}^{p} F_i$ est un sous-espace vectoriel stable par f.
3) On veut montrer réciproquement que si F est un sous-espace vectoriel stable par f alors $F = \bigoplus_{i=1}^{p} F_i$ où, pour tout $i \in [\![1\,;\,p]\!]$, $F_i = F \cap E_i$.
   a) Donner un exemple de trois espaces vectoriels A, B et C de E tels que $A \oplus B = E$ et $(A \cap C) \oplus (B \cap C) \neq C$. *On pourra se placer dans le cas où $E = \mathbb{K}^n$.*
   b) Justifier que pour tout x de F il existe $(x_1, \ldots, x_p) \in E_1 \times \cdots \times E_p$ tel que $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} x_i$.
   c) Exprimer $f(x)$ en fonction de $x_1, \ldots, x_p$ et en déduire qu'il existe $\mu_2, \ldots, \mu_p$ tous non nuls tels que $\sum_{i=2}^{p} \mu_i x_i$ appartienne à F.
   d) En réitérant le procédé précédent, montrer que pour tout $i \in [\![1\,;\,p]\!]$, $x_i \in F_i$.
   e) Conclure.
4) En déduire que l'endomorphisme $\check{f}$ induit par f sur F est diagonalisable.

Partie II : Endomorphisme nilpotent :

1) On suppose dans cette question que $E = \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et que f est l'endomorphisme de dérivation $f : P \mapsto P'$.
   a) Montrer que pour tout $k \leqslant n-1$, les sous-espaces vectoriels $\mathbb{R}_k[X]$ sont stables par f.
   b) Montrer réciproquement que si F est un sous-espace stable par f différent de $\{0\}$, il existe $k \in [\![0\,;\,n-1]\!]$ tel que $F = \mathbb{R}_k[X]$. On pourra considérer un polynôme de degré maximal dans F.
2) Soit f un endomorphisme nilpotent d'ordre n. C'est-à-dire que l'on suppose que $f^n = 0_{\mathscr{L}(E)}$ et $f^{n-1} \neq 0_{\mathscr{L}(E)}$.
   a) Soit $x \in E$ tel que $f^{n-1}(x) \neq 0$. Montrer que $(x, f(x), \ldots, f^{n-1}(x))$ est une base de E.
   b) En déduire qu'il existe une base $\mathscr{E}$ de E telle que

$$\mathsf{Mat}_{\mathscr{E}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 & n-1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   c) Déterminer les sous-espaces stables par f.