Devoir libre 5

1) Soient S, W des variables aléatoires discrètes sur un même espace probabilisé et à valeurs dans le même ensemble E.
Soit A une partie de E.
   a) Montrer que $(S \in A) \ \subset \ (W \in A) \cup (S \neq W)$
   b) Montrer que $\Big|P(S \in A) - P(W \in A)\Big| \leqslant P(S \neq W)$.
2) Soient X, Y des variables aléatoires discrètes sur un même espace probabilisé, indépendantes et suivant les lois de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ et $\mathcal{P}(\mu)$ (avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^+$).
Montrer que $X + Y$ suit la loi $\mathcal{P}(\lambda + \mu)$.
3) Soit $p \in [0, 1]$.
Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé et X et Y des variables aléatoires sur cet espace telles que :
   - X suit la loi $\mathcal{B}(p)$
   - Y suit la loi $\mathcal{P}(p)$
   - $(Y = 1) \subset (X = 1)$
   - $(X = 0) \subset (Y = 0)$

   a) Vérifier que les valeurs des probabilités des événements $(X = 0), (Y = 0), (X = 1), (Y = 1)$ sont compatibles avec ces deux inclusions.
   b) Calculer $P(X = Y)$.
   En déduire que $P(X \neq Y) \leqslant p^2$.
4) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On admet l'existence d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ et de variables aléatoires indépendantes $Z_1 = (X_1, Y_1), \ldots, Z_n = (X_n, Y_n)$ à valeurs dans $\{0, 1\} \times \mathbb{N}$ telles que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$,
   - X_i suit la loi $\mathcal{B}(p)$
   - Y_i suit la loi $\mathcal{P}(p)$
   - $(Y_i = 1) \subset (X_i = 1)$
   - $(X_i = 0) \subset (Y_i = 0)$

   a) Montrer que $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes et que $Y_1, \ldots, Y_n$ sont indépendantes.
   b) On pose $S = X_1 + \ldots + X_n$ et $W = Y_1 + \ldots + Y_n$.
   Montrer que W suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(np)$. On pourra utiliser la question 2).
   Rappeler sans démonstration la loi de S.
   c) Montrer que $(S \neq W) \subset \bigcup\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} (X_i \neq Y_i)$.
   d) Soit A une partie de $\mathbb{N}$. En utilisant toutes les questions précédentes, montrer que
$$|\mathcal{B}(n, p)(A) - \mathcal{P}(np)(A)| \leqslant np^2$$
5) Soit (p_n) une suite à termes dans $[0, 1]$ telle que (np_n) convergeant vers un réel λ.
   a) Retrouver à l'aide de la question précédente le résultat du cours :
$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \mathcal{B}(n, p_n)(\{k\}) \underset{n \to +\infty}{\to} \mathcal{P}(\lambda)(\{k\})$$
   b) Plus généralement, montrer que pour toute partie A de $\mathbb{N}$,
$$\mathcal{B}(n, p_n)(A) \underset{n \to +\infty}{\to} \mathcal{P}(\lambda)(A)$$