Problème I

1) a) La fonction f_α est impaire et dérivable de dérivée $f'_\alpha : x \mapsto \alpha - 3x^2$.
Sur $[0, \sqrt{\frac{\alpha}{3}}]$, f_α est continue et sa dérivée est strictement positive sur l'intervalle ouvert, donc f_α est strictement continue sur l'intervalle fermé (segment).
De même sur $[\sqrt{\frac{\alpha}{3}}, +\infty[$, d'où par imparité :
f_α est strictement croissante sur $[-\sqrt{\frac{\alpha}{3}}, \sqrt{\frac{\alpha}{3}}]$.
f_α est strictement décroissante sur $]-\infty, -\sqrt{\frac{\alpha}{3}}]$ et sur $[\sqrt{\frac{\alpha}{3}}, +\infty[$.

x	$-\infty$		$-\sqrt{\frac{\alpha}{3}}$		$\sqrt{\frac{\alpha}{3}}$		$+\infty$
$f'_\alpha(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f_\alpha(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{2\alpha}{3}\sqrt{\frac{\alpha}{3}}$	$\nearrow$	$\frac{2\alpha}{3}\sqrt{\frac{\alpha}{3}}$	$\searrow$	$-\infty$

b) Pour un réel x, $g_\alpha(x) = x((\alpha-1) - x^2)$.
Si $\alpha \leqslant 1$, $g_\alpha(x)$ est du signe opposé à x (au sens strict).
Si $\alpha > 1$, son signe est donné par le tableau suivant :

x	$-\infty$		$-\sqrt{\alpha-1}$		0		$\sqrt{\alpha-1}$		∞
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$(\alpha-1)-x^2$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$g_\alpha(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

.

2) a) Pour $\alpha = 1/2$, on obtient la figure suivante :

b) Soit $x \in]0, \sqrt{\alpha}[$. Comme f_α s'annule en 0 et en $\sqrt{\alpha}$, croît strictement sur $[0, \sqrt{\frac{\alpha}{3}}]$ et décroît strictement sur $[\sqrt{\frac{\alpha}{3}}, \infty[$, on a $0 < f_\alpha(x)$.
Or g_α est strictement négative sur $\mathbb{R}_+^*$ donc $f_\alpha(x) < x < \sqrt{\alpha}$.
Ainsi $f_\alpha(]0, \sqrt{\alpha}[) \subset]0, \sqrt{\alpha}[$ et par récurrence, on a $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \in]0, \sqrt{\alpha}[$.

c) Comme g_α est strictement négative sur $]0, \sqrt{\alpha}[$, on a

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} - u_n = g_\alpha(u_n) < 0$$

donc la suite (u_n) est strictement décroissante.

d) La suite (u_n) étant décroissante et minorée par 0, elle converge vers une limite $\ell \geqslant 0$.
$u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\to} \ell$ (suite extraite) et $u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\to} f_\alpha(\ell)$ par continuité de f_α.
Par unicité de la limite, $\ell = f_\alpha(\ell)$ donc g_α s'annule en ℓ. Or le seul zéro de g_α est 0 donc $\ell = 0$.

3) a) Soit $x \in [0, \sqrt{\alpha}]$, on a montré ci-dessus, que $f(x) \geqslant 0$. De plus, $f(x) = \alpha x - x^3 \leqslant \alpha x$ car $x^3 \geqslant 0$.
On en déduit alors que pour tout $n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \alpha u_n - u_n^3 \leqslant \alpha u_n$ car $u_n \in [0, \sqrt{\alpha}]$ puisque l'intervalle $[0, \sqrt{\alpha}]$ est stable par f_α.
On en déduit par récurrence que $0 < u_n \leqslant \alpha^n u_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) Par comparaison avec la série géométrique convergente de raison $\alpha \in]0,1[$ et par positivité des termes des deux séries, la série $\sum (u_n)_{n\geqslant 0}$ est convergente.

c) Comme (u_n) tend vers 0, $u_n^3 = u_n \times u_n^2$ est négligeable devant u_n (et donc devant αu_n car $\alpha \neq 0$). On en déduit que

$$u_{n+1} = \alpha u_n - u_n^3 = \alpha u_n + o(u_n) \sim \alpha u_n.$$

d) La série $\sum \alpha u_n$ est à terme positive et convergente et $u_{n+1} \sim \alpha u_n$ donc, par sommation des équivalents (cas des séries convergentes)

$$\sum_{k=n}^{\infty} u_{k+1} \sim \sum_{k=n}^{\infty} \alpha u_k$$

c'est-à-dire

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k \sim \alpha R_{n-1}.$$

e) Ainsi, en remarquant que $R_{n-1} = R_n + u_n$ on obtient que

$$R_n = \alpha R_{n-1} + o(R_n) = \alpha(R_n + u_n) + o(R_n).$$

Cela implique que

$$(1-\alpha)R_n = \alpha u_n + o(R_n).$$

De ce fait, $(1-\alpha)R_n \sim \alpha u_n$ car $1-\alpha \neq 0$ et donc $R_n \sim \frac{\alpha}{1-\alpha} u_n$.

f) i) On a

$$\begin{aligned}
\ln u_k - \ln u_{k-1} - \ln \alpha &= \ln \frac{\alpha u_{k-1} - u_{k-1}^3}{\alpha u_{k-1}} \\
&= \ln\left(1 - \frac{u_{k-1}^2}{\alpha}\right) \\
&\sim -\frac{u_{k-1}^2}{\alpha}
\end{aligned}$$

Or, d'après la question 3.a,

$$0 \leqslant \frac{u_{k-1}^2}{\alpha} \leqslant \frac{(u_0 \alpha^{k-1})^2}{\alpha} = \frac{u_0^2}{\alpha^3}\alpha^{2k},$$

donc $-\frac{u_{k-1}^2}{\alpha} = O(\alpha^{2k})$ et donc,

$$\ln u_k - \ln u_{k-1} - \ln \alpha = O(\alpha^{2k})$$

ii) Comme la série à termes positifs $\sum((\alpha^2)^k)$ converge comme série géométrique de raison α^2 de module strictement inférieur à 1.

Donc la série $\sum(\ln u_k - \ln u_{k-1} - \ln \alpha)_{k\geqslant 1}$ converge également. Notant S sa somme, on a

$$\ln u_n - \ln u_0 - n \ln \alpha = \sum_{k=1}^{n} (\ln u_k - \ln u_{k-1} - \ln \alpha) = S - o(1)$$

d'où

$$\ln u_n = n \ln \alpha + K + o(1)$$

avec $K = S + \ln u_0$.

iii) Il suffit de prendre l'exponentielle :

$$\begin{aligned} u_n &= e^{\ln u_n} \\ &= e^K \alpha^n e^{o(1)} \\ &\sim C\alpha^n \end{aligned}$$

où $C = e^K$.

iv) Par le théorème de sommation des équivalents dans le cas de séries équivalentes à termes positifs, il vient

$$R_n \sim \sum_{k=n+1}^{\infty} C\alpha^k = C\frac{\alpha^{n+1}}{1-\alpha}$$

v) On a ainsi $R_n \sim \frac{\alpha}{1-\alpha} C\alpha^n \sim \frac{\alpha}{1-\alpha} u_n$.

4) a)

$$\begin{aligned} \frac{1}{u_{n+1}^\beta} - \frac{1}{u_n^\beta} &= \frac{1}{u_n^\beta}((1-u_n^2)^{-\beta} - 1) \\ &= \frac{1}{u_n^\beta}(1 + \beta u_n^2 + o(u_n^2) - 1) \\ &\sim \beta u_n^{2-\beta} \end{aligned}$$

Choisissant $\beta = 2$, on a $\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} \sim 2$ (c'est-à-dire tend vers 2).

b) Par sommation des équivalents,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_{k+1}^2} - \frac{1}{u_k^2} \sim \sum_{k=0}^{n-1} 2$$

c'est-à-dire $\frac{1}{u_n^2} - \frac{1}{u_0}^2 \sim 2n$

d'où $\frac{1}{u_n^2} \sim 2n$ car $\frac{1}{u_0^2} = O(1) = o(n)$

et comme $u_n = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{u_n^2}}}$ (car $u_n > 0$), on obtient

$$u_n \sim \frac{1}{\sqrt{2n}}$$

Par comparaison avec les séries de Riemann, $\sum u_n$ diverge.

c)

$$\begin{aligned} \frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} - 2 &= \frac{1}{u_n^2}((1-u_n^2)^{-2} - 1) - 2 \\ &= \frac{1}{u_n^2}(1 + 2u_n^2 + \frac{(-2)(-3)}{2}u_n^4 + o(u_n^4) - 1) - 2 \\ &\sim 3u_n^2 \sim \frac{3}{2n} \sim \frac{3}{2(n+1)} \end{aligned}$$

d) Par sommation des équivalents, il vient

$$\frac{1}{u_n^2} - \frac{1}{u_0^2} - 2n \sim \sum_{k=0}^{n-1} \frac{3}{2(k+1)} \sim \frac{3}{2}\ln n$$

et ainsi

$$\frac{1}{u_n^2} = 2n + \frac{3}{2}\ln n + o(\ln n)$$

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{2n}}(1 + \frac{3}{4}\frac{\ln n}{n} + o(\frac{\ln n}{n}))^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{2n}} - \frac{3}{8\sqrt{2}}\frac{\ln n}{n^{3/2}} + o(\frac{\ln n}{n^{3/2}})$$

Problème II

Partie I - Préliminaires et cas où $\alpha > 1$.

1) On suppose que $\alpha > 1$. On a alors

$$0 \leqslant \left|\frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^\alpha}\right| \leqslant \frac{1}{n^\alpha}.$$

Maintenant, comme $\alpha > 1$, la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge (série de Riemann) et par comparaison pour les séries à termes positifs, la série $\sum \left|\frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^\alpha}\right|$ converge aussi. On en déduit que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^\alpha}$ est absolument convergente donc convergente.

Partie II - Cas où α appartient à $]\frac{1}{2}, 1]$.

On suppose dans cette partie que $\frac{1}{2} < \alpha \leqslant 1$. On définit la fonction ϕ définie sur $[1, \infty[$ par $t \mapsto \frac{\sin(\pi\sqrt{t})}{t^\alpha}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \phi(n) = \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^\alpha}$ et $v_n = \int_n^{n+1} \phi(t)dt$.

2) On pose le changement de variable $y = \sqrt{t}$. La fonction $t \mapsto \sqrt{t}$ est bien de classe $\mathscr{C}^1$ et strictement croissante de $[1, x]$ dans $[1, \sqrt{x}]$. On a de plus, $dy = \frac{1}{2\sqrt{t}}dt$. C'est-à-dire, $dt = 2ydy$. On obtient alors

$$\int_1^x \frac{\sin(\pi\sqrt{t})}{t^\alpha}dt = \int_1^{\sqrt{x}} \frac{\sin(\pi y)}{(y^2)^\alpha} \times 2ydy = 2\int_1^{\sqrt{x}} \frac{\sin(\pi y)}{y^{2\alpha-1}}dy.$$

3) On pose $w_p = \int_p^{p+1} \frac{\sin(\pi y)}{y^{2\alpha-1}}dy$.

a) On effectue cette fois le changement de variables affine $y = p+s$. On a $dy = ds$. On en déduit que

$$w_p = \int_0^1 \frac{\sin(\pi(p+s))}{(p+s)^{2\alpha-1}}ds = (-1)^p \int_0^1 \frac{\sin(\pi s)}{(p+s)^{2\alpha-1}}ds.$$

En effet, $\sin(p\pi + s\pi) = (-1)^p \sin(\pi s)$.

b) Nous allons montrer que la série $\sum_{p\geqslant 1} w_p$ relève du théorème des séries alternées.

— Pour tout $p \geqslant 1$, $\int_0^1 \frac{\sin(\pi s)}{(p+s)^{2\alpha-1}}ds$ est positive comme intégrale d'une fonction positive. De ce fait, $w_p w_{p+1} \leqslant 0$.

— Soit $p \geqslant 1$,

$$|w_p| \leqslant \int_0^1 \frac{|\sin(\pi s)|}{(p+s)^{2\alpha-1}}ds \leqslant \int_0^1 \frac{1}{(p+s)^{2\alpha-1}}ds \leqslant \frac{1}{p^{2\alpha-1}}$$

car, $2\alpha - 1$ étant positif, $s \mapsto \frac{1}{(p+s)^{2\alpha-1}}$ est décroissante sur $[0, 1]$. On en déduit que $\lim(w_p) = 0$.

— Pour finir, montrons que $(|w_p|)$ est décroissante, on voit que

$$|w_p| - |w_{p+1}| = \int_0^1 \left(\frac{\sin(\pi s)}{(p+s)^{2\alpha-1}} - \frac{\sin(\pi s)}{(p+1+s)^{2\alpha-1}} \right) ds.$$

Or, pour tout $s \in [0,1]$, $\left(\frac{1}{(p+s)^{2\alpha-1}} - \frac{1}{(p+1+s)^{2\alpha-1}} \right) \geqslant 0$. On en déduit que $|w_p| - |w_{p+1}| \geqslant 0$ et donc que $(|w_p|)$ est décroissante.

Finalement, la série $\sum_{p \geqslant 1} w_p$ vérifie les hypothèses du théorème des séries alternées donc la série converge.

4) a) Soit X un réel positif,

$$\left| \int_{\lfloor X \rfloor}^X \frac{\sin(\pi y)}{y^{2\alpha-1}} dy \right| \leqslant \int_{\lfloor X \rfloor}^X \frac{1}{y^{2\alpha-1}} dy \leqslant \frac{X - \lfloor X \rfloor}{\lfloor X \rfloor^{2\alpha-1}} \leqslant \frac{1}{\lfloor X \rfloor^{2\alpha-1}}$$

L'avant-dernière inégalité vient du fait que la fonction $y \mapsto \frac{1}{y^{2\alpha-1}}$ est décroissante.

b) Comme $\lfloor X \rfloor$ tend vers $+\infty$ quand X tend vers $+\infty$ et que $2\alpha - 1 \geqslant 0$, alors on obtient bien que

$\int_{\lfloor X \rfloor}^X \frac{\sin(\pi y)}{y^{2\alpha-1}} dy \to 0$ quand X tend vers $+\infty$.

c) Soit $X \in \mathbb{R}_+$, on a

$$\int_1^X \frac{\sin(\pi y)}{y^{2\alpha-1}} dy = \int_1^{\lfloor X \rfloor} \frac{\sin(\pi y)}{y^{2\alpha-1}} dy + \int_{\lfloor X \rfloor}^X \frac{\sin(\pi y)}{y^{2\alpha-1}} dy = \sum_{p=1}^{\lfloor X \rfloor - 1} w_p + \int_{\lfloor X \rfloor}^X \phi(t) dt.$$

Maintenant, quand X tend vers $+\infty$, la série tend vers la somme de la série $\sum w_p$ et le terme de droite tend vers 0 d'après la question précédente. Finalement

$$\lim_{X \to +\infty} \int_1^X \frac{\sin(\pi y)}{y^{2\alpha-1}} dy = \sum_{p=1}^{+\infty} w_p.$$

d) On calcule les sommes partielles. Pour $n \geqslant 1$,

$$\sum_{k=1}^n v_k = \int_1^{n+1} \phi(t) dt = 2 \int_1^{\sqrt{n}} \frac{\sin(\pi y)}{y^{2\alpha-1}} dy$$

d'après la question 2. En faisant tendre vers $+\infty$, ces termes convergent vers $\sum_{p=1}^{+\infty} w_p$. On en déduit que la série $\sum_{n \geqslant 1} v_n$ converge.

5) a) Pour tout $t \in [1, +\infty[$,

$$\phi'(t) = \frac{\frac{\pi}{2} \cos(\pi \sqrt{t}) - \frac{\alpha}{\sqrt{t}} \sin(\pi \sqrt{t})}{t^{\alpha + \frac{1}{2}}}.$$

On en déduit que $|\phi'(t)| \leqslant \frac{K}{t^{\alpha+\frac{1}{2}}}$ en posant $K = \frac{\pi}{2} + \alpha$.

b) Soit a et b deux réels tels que $1 \leqslant a \leqslant b$, la fonction ϕ est dérivable sur $[a,b]$. On peut donc appliquer l'égalité des accroissements finis. Il existe $c \in]a,b[$ tel que

$$|\phi(b) - \phi(a)| = (b-a)|\phi'(c)| \leqslant \frac{K(b-a)}{c^{\alpha+\frac{1}{2}}} \leqslant \frac{K(b-a)}{a^{\alpha+\frac{1}{2}}}$$

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$|u_n - v_n| = \left|\phi(n) - \int_n^{n+1} \phi(t)dt\right| = \left|\int_n^{n+1} (\phi(n) - \phi(t))dt\right| \leqslant \int_n^{n+1} |\phi(n) - \phi(t)|dt.$$

Or, d'après la question précédente, pour tout $t \in [n, n+1]$, $|\phi(n) - \phi(t)| \leqslant \frac{K}{n^{\alpha+\frac{1}{2}}}$ donc,

$$|u_n - v_n| \leqslant \frac{K}{n^{\alpha+\frac{1}{2}}}.$$

6) Pour tout entier n, $u_n = v_n + (u_n - v_n)$.
On a déjà vu, à la question 4.d que la série $\sum v_n$ convergeait. Maintenant, comme $\alpha > \frac{1}{2}$, $\alpha + \frac{1}{2} > 1$ et donc la série $\sum \frac{K}{n^{\alpha+\frac{1}{2}}}$ converge. Par comparaison de séries à termes positifs, on déduit que la question ci-dessus que la série $\sum |u_n - v_n|$ converge. Cela signifie que la série $\sum u_n - v_n$ est absolument convergente donc convergente. Par linéarité, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge.

Partie III - Cas où $\alpha = \frac{1}{2}$.

On suppose, dans cette partie, que $\alpha = \frac{1}{2}$.

7) a) $\sqrt{1+u} = (1+u)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}u + O_{u\to 0}(u^2)$.
$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + O_{u\to 0}(u^3)$ (dans la suite, on fera tendre u vers zéro par valeurs complexes)

b)

$$\begin{aligned}
e^{i\pi\sqrt{n+1}} - e^{i\pi\sqrt{n}} &= e^{i\pi\sqrt{n}}\left(e^{i\pi(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})} - 1\right) \\
&= e^{i\pi\sqrt{n}}\left(e^{i\pi\sqrt{n}(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1)} - 1\right) \\
&= e^{i\pi\sqrt{n}}\left(e^{i\pi\sqrt{n}(\frac{1}{2n}+O(\frac{1}{n^2}))} - 1\right) \\
&= e^{i\pi\sqrt{n}}\left(e^{h_n} - 1\right) \text{ avec } h_n = i\pi(\frac{1}{2\sqrt{n}} + O(\frac{1}{n^{3/2}})) \\
&= e^{i\pi\sqrt{n}}\left(h_n + \frac{h_n^2}{2} + O(h_n^3)\right) \text{ car } h_n \underset{n\to\infty}{\to} 0 \\
&= e^{i\pi\sqrt{n}}\left(i\pi(\frac{1}{2\sqrt{n}} + O(\frac{1}{n^{3/2}})) + \frac{1}{2}(-\pi^2)(\frac{1}{4n} + O(\frac{1}{n^{3/2}})) + O(\frac{1}{n^{3/2}})\right) \\
&\quad (\text{ car } h_n = O(\frac{1}{\sqrt{n}}) \text{ donc } O(h_n^3) = O(\frac{1}{n^{3/2}})) \\
&= e^{i\pi\sqrt{n}}\left(\frac{i\pi}{2\sqrt{n}} - \frac{\pi^2}{8n}\right) + O(\frac{1}{n^{3/2}}) \\
&\quad \text{car } e^{i\pi\sqrt{n}} = O(1)
\end{aligned}$$

c) En égalant les parties réelles on obtient

$$\cos(\pi\sqrt{n+1}) - \cos(\pi\sqrt{n}) = \cos(\pi\sqrt{n}).\frac{-\pi^2}{8n} - \sin(\pi\sqrt{n}).\frac{\pi}{2\sqrt{n}} + O(\frac{1}{n^{3/2}})$$

et ainsi :

$$\frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{\sqrt{n}} = \frac{2}{\pi}\Big(\cos(\pi\sqrt{n+1}) - \cos(\pi\sqrt{n})\Big) - \frac{\pi\cos(\pi\sqrt{n})}{4n} + \beta_n$$

où $\beta_n = O(\frac{1}{n^{3/2}})$.

8) a) $\gamma_{(2n)^2} = \cos(2\pi n) \underset{n\to\infty}{\to} 1$ et $\gamma_{(2n+1)^2} = \cos((2n+1)\pi) \underset{n\to\infty}{\to} -1 \neq 1$. Donc la suite (γ_n) diverge car sinon, toutes ses suites extraites convergerait vers sa limite.

b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on obtient par télescopage :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(\pi\sqrt{k})}{\sqrt{k}} = \frac{2}{\pi}(\cos(\pi\sqrt{n+1} - \cos\pi) - \frac{\pi}{4}\sum_{k=1}^{n} \frac{\cos(\pi\sqrt{k})}{k} + \sum_{k=1}^{n} w_k$$

avec $w_k = 0(\frac{1}{k^{3/2}})$. La série de terme général w_k converge absolument car la série de terme général $\frac{1}{k^{3/2}}$ converge et ses termes sont positifs.
Donc la **suite** de terme général $\sum_{k=1}^{n} w_k$ converge.
On a admis que la **suite** de terme général $\sum_{k=1}^{n} \frac{\cos(\pi\sqrt{k})}{k}$ convergeait.
Donc la **suite** de terme général $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(\pi\sqrt{k})}{\sqrt{k}}$ diverge, car sinon la suite (α_{n+1}) convergerait comme combinaison linéaire de suites convergentes.
Ainsi la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} \frac{\sin(\pi\sqrt{k})}{\sqrt{k}}$ diverge.

Partie IV - Cas $\alpha < \frac{1}{2}$.

9) Pour tout entier n non nul,

$$\frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{\sqrt{n}} = n^{\alpha-\frac{1}{2}}\frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^\alpha} = n^{\alpha-\frac{1}{2}}(S_n - S_{n-1}).$$

10) Soit $N \geqslant 2$. On effectue une transformation d'Abel :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{\sqrt{n}} &= \sum_{n=1}^{N} n^{\alpha-\frac{1}{2}} S_n - \sum_{n=1}^{N} n^{\alpha-\frac{1}{2}} S_{n-1} \\
&= \sum_{n=1}^{N} n^{\alpha-\frac{1}{2}} S_n - \sum_{k=0}^{N-1} (k+1)^{\alpha-\frac{1}{2}} S_k \text{ par le changement d'indice } n = k+1 \Leftrightarrow k = \\
&= \sum_{n=1}^{N} n^{\alpha-\frac{1}{2}} S_n - \left(\sum_{k=0}^{N} (k+1)^{\alpha-\frac{1}{2}} S_k - (N+1)^{\alpha-\frac{1}{2}} S_{N+1}\right) \\
&= \sum_{n=1}^{N} S_n \left(n^{\alpha-\frac{1}{2}} - (n+1)^{\alpha-\frac{1}{2}}\right) + S_N (N+1)^{\alpha-\frac{1}{2}}. \text{ car } S_0 = 0
\end{aligned}$$

11) a) Par hypothèse de l'énoncé (qui va finir par se montrer contradictoire) la suite (S_n) converge donc est bornée.

b) Par la question précédente, il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ |S_n| \leqslant M$.
Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} |S_n \left(n^{\alpha-\frac{1}{2}} - (n+1)^{\alpha-\frac{1}{2}}\right)| &\leqslant M \sum_{n=1}^{N} \left|n^{\alpha-\frac{1}{2}} - (n+1)^{\alpha-\frac{1}{2}}\right| \\
&= M \sum_{n=1}^{N} \left(n^{\alpha-\frac{1}{2}} - (n+1)^{\alpha-\frac{1}{2}}\right) \text{ car } n^{\alpha-\frac{1}{2}} - (n+1)^{\alpha-\frac{1}{2}} \geqslant 0 \\
&= M \left(1 - (N+1)^{\alpha-\frac{1}{2}}\right) \text{ par télescopage} \\
&\leqslant M
\end{aligned}$$

Ainsi la série à termes positifs $\sum_{n\geqslant 1}\left|S_n\left(n^{\alpha-\frac{1}{2}}-(n+1)^{\alpha-\frac{1}{2}}\right)\right|$ converge car la suite des ses sommes partielles est majorée.

Donc la série $\sum_{n\geqslant 1} S_n\left(n^{\alpha-\frac{1}{2}}-(n+1)^{\alpha-\frac{1}{2}}\right)$ converge absolument, donc converge.

c) $(N+1)^{\alpha-\frac{1}{2}}S_N \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0$ car $(N+1)^{\alpha-\frac{1}{2}} \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0$ et $(S_N)_{N\in\mathbb{N}^*}$ est bornée.

Donc la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{\sqrt{n}}$ converge puisque la suite de ses sommes partielles est somme de deux suites convergentes.

12) Le résultat obtenu à la question précédente est en contradiction avec celui de la partie précédente.

Donc la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^\alpha}$ diverge.