Calculatrices interdites. Les deux problèmes sont indépendants.

Problème I

Soit $\alpha > 0$, on considère f_α la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_\alpha : x \mapsto \alpha x - x^3$.
Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = f_\alpha(u_n)$$

On se propose d'étudier la suite (u_n) et la série $\sum(u_n)$.

1) a) Étudier les variations de f_α sur $\mathbb{R}$.
   b) Étudier le signe de $g_\alpha : x \mapsto f_\alpha(x) - x$ sur $\mathbb{R}$.
2) On suppose dans cette question que $\alpha \in]0,1]$ et que $u_0 \in]0, \sqrt{\alpha}[$.
   a) Tracer sur un même dessin la courbe représentative de f_α et la droite d'équation $y = x$.
   b) Montrer que l'intervalle $]0, \sqrt{\alpha}[$ est stable par f_α.
   En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in]0, \sqrt{\alpha}[$.
   c) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
   d) Montrer que $u_n \longrightarrow 0$.
3) On suppose dans cette question que $0 < \alpha < 1$ et $u_0 \in]0, \sqrt{\alpha}[$.
   a) Montrer que $\forall x \in [0, \sqrt{\alpha}], 0 \leqslant f_\alpha(x) \leqslant \alpha x$.
   En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant \alpha^n u_0$.
   b) Montrer que la série de terme général u_n est convergente.

   On note dans la suite de la question 3, $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.

   c) Montrer que $u_{n+1} \sim \alpha u_n$.
   d) Montrer que $R_n \sim \alpha R_{n-1}$
   e) En déduire que $R_n \sim \frac{\alpha}{1-\alpha} u_n$.
   f) i) Montrer que $\ln u_k - \ln u_{k-1} - \ln \alpha \sim -\dfrac{u_{k-1}^2}{\alpha}$.
   En déduire que $\ln u_k - \ln u_{k-1} - \ln \alpha = O(\alpha^{2k})$.
   ii) En déduire qu'il existe un réel K tel que $\ln u_n = n \ln \alpha + K + o(1)$.
   iii) Donner un équivalent de u_n.
   iv) En déduire un équivalent de R_n sans utiliser la question 3) e).
   v) Retrouver le résultat de la question 3) e).
4) On se place dans le cas où $\alpha = 1$ et $u_0 \in]0, 1[$.
   a) Déterminer un réel β tel que $\dfrac{1}{u_{n+1}^\beta} - \dfrac{1}{u_n^\beta}$ ait une limite finie ℓ non nulle.
   b) En déduire un équivalent simple de u_n et la nature de la série $\sum(u_n)_{n\geqslant 0}$.
   c) Déterminer un équivalent de $\dfrac{1}{u_{n+1}^\beta} - \dfrac{1}{u_n^\beta} - \ell$.
   d) En déduire un développement asymptotique de u_n avec un reste en $o\left(\dfrac{\ln n}{n^{3/2}}\right)$.

   On pourra utiliser que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln n$.

Problème II

Le but de ce problème est de déterminer la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^\alpha}$ suivant la valeur du réel α.

Partie I - Cas où $\alpha > 1$.

1) Montrer que si $\alpha > 1$ alors la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^\alpha}$ converge.

Partie II - Cas où α appartient à $]\frac{1}{2}, 1]$.

On suppose dans cette partie que $\frac{1}{2} < \alpha \leqslant 1$. On définit la fonction ϕ sur $[1, \infty[$ par $t \mapsto \frac{\sin(\pi\sqrt{t})}{t^\alpha}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \phi(n) = \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^\alpha}$ et $v_n = \int_n^{n+1} \phi(t)dt$.

2) À l'aide d'un changement de variable, montrer que pour tout $x > 1$,

$$\int_1^x \phi(t)dt = 2\int_1^{\sqrt{x}} \frac{\sin(\pi y)}{y^{2\alpha-1}}dy.$$

3) On pose $w_p = \int_p^{p+1} \frac{\sin(\pi y)}{y^{2\alpha-1}}dy$.

   a) À l'aide d'un changement de variable, montrer que $w_p = (-1)^p \int_0^1 \frac{\sin(\pi s)}{(p+s)^{2\alpha-1}}ds$

   b) En déduire que la série $\sum_{p\geqslant 1} w_p$ converge.

4) a) Soit X un réel supérieur ou égal à 1, on désigne par $\lfloor X \rfloor$ la partie entière inférieure de X. Montrer que

$$\left| \int_{\lfloor X \rfloor}^X \frac{\sin(\pi y)}{y^{2\alpha-1}}dy \right| \leqslant \frac{1}{\lfloor X \rfloor^{2\alpha-1}}.$$

   b) En déduire que $\int_{\lfloor X \rfloor}^X \frac{\sin(\pi y)}{y^{2\alpha-1}}dy \to 0$ quand X tend vers $+\infty$.

   c) En déduire que $\int_1^X \frac{\sin(\pi y)}{y^{2\alpha-1}}dy$ a une limite finie quand X tend vers $+\infty$. On pourra utiliser la question 3.b)

   d) En déduire que la série $\sum_{n\geqslant 1} v_n$ converge.

5) a) Montrer qu'il existe un réel K tel que $\forall t \in [1, +\infty[, |\phi'(t)| \leqslant \frac{K}{t^{\alpha+\frac{1}{2}}}$

   b) Montrer que pour tous réel a, b tels que $1 \leqslant a \leqslant b$, $|\phi(b) - \phi(a)| \leqslant \frac{K(b-a)}{a^{\alpha+\frac{1}{2}}}$.

   c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|u_n - v_n| \leqslant \frac{K}{n^{\alpha+\frac{1}{2}}}$.

6) En déduire la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$.

Partie III - Cas où $\alpha = \frac{1}{2}$.

On suppose, dans cette partie, que $\alpha = \frac{1}{2}$.

7) On veut établir un développement asymptotique de $\dfrac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^\alpha}$.

   a) Rappeler le développement en 0 de $u \mapsto \sqrt{1+u}$ à un $O(u^2)$ près et celui de $u \mapsto e^u$ à un $O(u^3)$ près.

   b) En déduire que
$$e^{i\pi\sqrt{n+1}} - e^{i\pi\sqrt{n}} = \frac{i\pi e^{i\pi\sqrt{n}}}{2\sqrt{n}} - \frac{\pi^2 e^{i\pi\sqrt{n}}}{8n} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$

   c) Montrer alors que
$$\frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^\alpha} = -\frac{2}{\pi}\Big(\cos(\pi\sqrt{n+1}) - \cos(\pi\sqrt{n})\Big) - \frac{\pi}{4n}\cos(\pi\sqrt{n}) + \beta_n$$
   où $\beta_n = O\left(\dfrac{1}{n^{3/2}}\right)$.

8) a) Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \beta_n$.

   b) On pose $\gamma_n = \cos(\pi\sqrt{n})$. Montrer que la suite (γ_n) diverge. *On pourra considérer deux suites extraites.*

   c) On admet qu'en procédant comme dans la partie II, on puisse prouver que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\cos(\pi\sqrt{n})}{n}$ converge. En déduire la nature de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{\sqrt{n}}$

Partie IV - Cas $\alpha < \frac{1}{2}$.

On suppose, dans cette partie, que α est strictement inférieur à $\frac{1}{2}$.

On va montrer par l'absurde que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^\alpha}$ diverge. On suppose donc qu'elle converge. On pose $S_0 = 0$ et pour tout $p \geqslant 1$,
$$S_p = \sum_{n=1}^{p} \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^\alpha}.$$

9) Montrer que pour tout entier n non nul,
$$\frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{\sqrt{n}} = n^{\alpha-\frac{1}{2}}(S_n - S_{n-1}).$$

10) En déduire que pour $N \geqslant 2$,
$$\sum_{n=1}^{N} \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{N} S_n\left(n^{\alpha-\frac{1}{2}} - (n+1)^{\alpha-\frac{1}{2}}\right) + S_N(N+1)^{\alpha-\frac{1}{2}}.$$

11) a) Justifier que la suite (S_n) est bornée.

   b) En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} S_n\left(n^{\alpha-\frac{1}{2}} - (n+1)^{\alpha-\frac{1}{2}}\right)$ converge.

   c) En déduire la nature de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{\sqrt{n}}$.

12) Conclure sur la nature de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^\alpha}$.