Calculatrices interdites. Les deux problèmes sont indépendants.

Problème 1

Partie I

Soient a, b deux nombres réels strictement positifs, on considère les suites (a_n) et (b_n) définies par

$$\begin{cases} a_0 = a & b_0 = b \\ \forall n \in \mathbb{N} & a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \\ & b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \end{cases}$$

1) Que dire des suites (a_n) et (b_n) si $a = b$?

2) Montrer que si $(x, y) \in (\mathbb{R}^{+*})^2$, on a

$$\sqrt{xy} \leqslant \frac{x+y}{2}$$

3) Démontrer que les suites (a_n) et (b_n) sont monotones à partir du rang 1, puis qu'elles sont bornées.

4) Montrer que (a_n) et (b_n) convergent vers une même limite strictement positive.

On notera $M(a, b)$ la limite commune aux suites (a_n) et (b_n).
On définira la fonction f sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $f(x) = M(1, x)$.

5) Soit $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$, exprimer en fonction de λ et $M(a, b)$ les quantités suivantes :

$$M(b, a) \quad \text{et} \quad M(\lambda a, \lambda b)$$

6) Justifier que $M(a, b) = a f\left(\frac{b}{a}\right)$.

Partie II

Pour a, b deux nombres réels strictement positifs, on considère les intégrales

$$I(a, b) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{(a^2 + t^2)(b^2 + t^2)}} \quad \text{et} \quad J(a, b) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{(a^2 + t^2)(b^2 + t^2)}}$$

7) Justifier que les intégrales $I(a, b)$ et $J(a, b)$ convergent, puis que $J(a, b) = 2I(a, b)$.

8) En effectuant le changement de variable $t = \dfrac{1}{2}\left(s - \dfrac{ab}{s}\right)$, montrer que

$$J\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right) = 2I(a, b)$$

9) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ I(a_n, b_n) = I(a, b)$$

10) a) Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} I(a_n, b_n) = I(M(a, b), M(a, b))$.

On pourra, pour tout entier naturel n, considérer les fonctions f_n définies sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $f_n : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{(a_n^2 + t^2)(b_n^2 + t^2)}}$.

b) En déduire que

$$I(M(a,b), M(a,b)) = I(a,b)$$

11) Conclure que

$$M(a,b) = \frac{\pi}{2I(a,b)}$$

Partie III

12) On fixe $x > 0$. En effectuant le changement de variable $t = \frac{x}{s}$, montrer que

$$I(1,x) = 2\int_0^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}\sqrt{x^2+t^2}}\, dt$$

13) Montrer que $I(1,x) - 2\displaystyle\int_0^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{x^2+t^2}}\, dt$ est négligeable devant $2\displaystyle\int_0^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{x^2+t^2}}\, dt$ quand x tend vers 0^+.

14) Dériver $t \mapsto \ln(t+\sqrt{1+t^2})$ et en déduire une expression réduite pour $\displaystyle\int_0^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{x^2+t^2}}\, dt$.

15) Déterminer un équivalent simple de $I(1,x)$ en $x = 0^+$ et en déduire que

$$f(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} -\frac{\pi}{2\ln(x)}$$

16) Pour $x > 0$, déterminer une relation simple entre x, $f(x)$ et $f\left(\frac{1}{x}\right)$ et en déduire que

$$f(x) \underset{x\to +\infty}{\sim} \frac{\pi x}{2\ln(x)}$$

Partie IV

17) Soit $x > 0$, montrer que

$$I(1,x) = \frac{2}{1+x} I\left(1, \frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)$$

18) On définit la suite (w_n) par $w_0 = x$ et $w_{n+1} = \dfrac{2\sqrt{w_n}}{1+w_n}$.

a) Montrer que la suite (w_n) converge vers 1.

b) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ I(1,x) = I(1, w_{n+1}) \prod_{k=0}^{n} \frac{2}{1+w_k}$$

c) Soit la suite (p_n) définie par

$$p_n = \prod_{k=0}^{n} \frac{1+w_k}{2}$$

Montrer que la suite (p_n) converge vers une limite ℓ non nulle, puis exprimer de manière simple $I(1,x)\ell$.

Problème 2

Dans ce problème n désignera un entier strictement positif.
Soit f est un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie E, χ_f désignera son polynôme caractéristique, pour tout scalaire λ, $E_\lambda(f)$ désignera $\operatorname{Ker}(f - \lambda \mathsf{id}_E)$ et $Sp(f)$ désignera son spectre.
De même, si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, χ_A désignera son polynôme caractéristique, pour tout scalaire λ, $E_\lambda(A)$ désignera $\operatorname{Ker}(A - \lambda I_n)$ et $Sp(A)$ désignera son spectre.
Pour toutes matrices A, B de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, on note $h_{A,B}$ l'endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ défini par :

$$\forall\, M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \quad , \quad h_{A,B}(M) = AM - MB$$

Partie I : Un exemple

Soit A_0 et B_0 les matrices de $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ données par :

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \quad , \quad B_0 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

On considère la base $\mathscr{B} = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ de $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ et on note H_0 la matrice de l'endomorphisme $\varphi = h_{A_0,B_0}$ dans cette base.

1) Déterminer $Sp(A_0)$ et $Sp(B_0)$.

2) Déterminer H_0 puis $Sp(H_0)$. On pourra admettre que $\chi_{H_0} = X^4 - 4X^3 + 5X^2 - 2X$.
Vérifier que $Sp(H_0) = \Big\{a - b/(a,b) \in Sp(A_0) \times Sp(B_0)\Big\}$.

3) Montrer que A_0 et B_0 sont diagonalisables dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$.

4) La matrice H_0 est-elle diagonalisable ?

Partie II : étude du cas général

Dans la suite du problème, A et B sont quelconques dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. On se propose d'étudier les liens existant entre la diagonalisabilité de A et B et celle de $h_{A,B}$

5) Montrer que B et sa transposée B^T ont même polynôme caractéristique (question de cours). Que peut-on en conclure au niveau des spectres ?

6) Soit $a \in Sp(A)$ et $b \in Sp(B) = Sp(B^T)$. On fixe $(V, W) \in \big(\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \backslash \{0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})}\}\big)^2$ tels que $A\,V = a\,V$ et $B^T\,W = b\,W$.

   a) Expliciter les coefficients de $V\,W^T$ en posant $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ et $W = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$.
   En déduire que $V\,W^T \neq 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{C})}$

   b) Montrer que $V\,W^T$ est un vecteur propre de $h_{A,B}$.

   c) En déduire une inclusion entre les ensembles $Sp(h_{A,B})$ et $\Big\{a - b/(a,b) \in Sp(A) \times Sp(B)\Big\}$.

7) Soient $(V_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ et $(W_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ deux bases de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$.

On note P et Q les matrices dont les colonnes sont respectivement $(V_1, V_2, \cdots, V_n)$ et $(W_1, W_2, \cdots, W_n)$.

Montrer que pour tout $i, j \in [\![1, n]\!]$, $V_i W_j^T = P\, E_{i,j}\, Q^T$ ($(E_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ désigne la base canonique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$).

En déduire que la famille de $(V_i\, W_j^T)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ est une base de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

8) Déduire des questions 6) et 7) que si A et B sont diagonalisables dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, alors $h_{A,B}$ est diagonalisable.

9) a) Soit $(P_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ une base de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ avec $X \neq 0$.
Montrer que la famille $(P_{ij}X)_{(i,j)\in[1,n]^2}$ est une famille génératrice de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$.

b) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. On note $h_A = h_{A,A}$. On suppose que h_A est diagonalisable.
En appliquant la question précédente à une base de vecteurs propres $(P_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ de h_A et à un vecteur propre X de A dont on justifiera l'existence, montrer que A est diagonalisable.