L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve
Les deux exercices sont indépendants
Ce sujet comporte 4 pages

Exercice I

On rappelle ici quelques propriétés élémentaires d'arithmétique.

— Pour tout $(a, b) \in \mathbb{N}^{*2}$, on dit que a divise b s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $b = ka$. On dit aussi que a est un diviseur de b, ou encore que b est multiple de a.
Pour tout $a \in \mathbb{N}^*$, on note $a\mathbb{N}^*$ l'ensemble des multiples de a dans $\mathbb{N}^*$. Ainsi a divise b si et seulement si $b \in a\mathbb{N}^*$.

— Pour tout $(a, b) \in \mathbb{N}^{*2}$ on appelle plus grand diviseur commun (PGCD) de a et de b l'unique entier naturel noté $a \wedge b$ vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, (n \text{ divise } a \wedge b \Leftrightarrow n \text{ divise } a \text{ et } n \text{ divise } b)$$

— On dit qu'un entier naturel p supérieur ou égal à 2 est un nombre premier si ses seuls diviseurs sont 1 et p.
Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers. On rappelle que $\mathcal{P}$ est infini.
On note $p_1 < p_2 < p_3 < \cdots < p_n < p_{n+1} < \cdots$ la suite des nombres premiers rangés dans l'ordre croissant. Ainsi, $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, etc.

— Si $n \in \mathbb{N}^*$, si $q_1, \ldots, q_n$ sont des nombres premiers distincts, alors pour tout $a \in \mathbb{N}^*$, on a l'équivalence

$$(\forall i \in [\![1, n]\!], \quad q_i \text{ divise } a) \Leftrightarrow \prod_{i=1}^{n} q_i \text{ divise } a.$$

— Pour tout $a \in \mathbb{N}^*$ tel que $a \geqslant 2$, il existe $p \in \mathcal{P}$ tel que p divise a.

A - Lois zêta

Pour tout réel $x > 1$, on note : $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $x > 1$. Montrer qu'on définit la loi de probabilité d'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ en posant
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P(X = n) = \frac{1}{\zeta(x) n^x}.$$

On dira qu'une telle variable aléatoire X suit la loi de probabilité zêta de paramètre x.
Dans les questions suivantes de cette sous-partie A, on suppose que X est une variable aléatoire qui suit la loi zêta de paramètre $x > 1$.

2. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur x pour que X admette une espérance finie. Exprimer alors cette espérance à l'aide de ζ.
3. Plus généralement, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, donner une condition nécessaire et suffisante portant sur x pour que X^k admette une espérance finie. Exprimer alors cette espérance à l'aide de ζ.
4. En déduire la variance de X quand elle existe.
5. Montrer que, pour tout $a \in \mathbb{N}^*$, $P(X \in a\mathbb{N}^*) = \frac{1}{a^x}$.

B - Mutuelle indépendance

Soit x un réel tel que $x > 1$ et soit X une variable aléatoire qui suit la loi zêta de paramètre x.

6. Montrer que la famille $((X \in p_i\mathbb{N}^*))_{i\in\mathbb{N}^*}$ est une famille d'évènements mutuellement indépendants.

Cela entraine, et on ne demande pas de le démontrer, que leurs complémentaires sont mutuellement indépendants.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n l'événement $B_n = \bigcap_{k=1}^{n}(X \notin p_k\mathbb{N}^*)$.

7. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} P(B_n) = P(X = 1)$. En déduire que

$$\forall x \in]1, +\infty[, \quad \frac{1}{\zeta(x)} = \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{p_k^x}\right)$$

C - Deux variables indépendantes suivant une loi zêta

Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $x > 1$. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant chacune une loi de probabilité zêta de paramètre x. Soit A l'événement « Aucun nombre premier ne divise X et Y simultanément ». Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note C_n l'événement

$$C_n = \bigcap_{k=1}^{n}((X \notin p_k\mathbb{N}^*) \cup (Y \notin p_k\mathbb{N}^*)).$$

8. Exprimer l'événement A à l'aide des événements C_n. En déduire que

$$P(A) = \frac{1}{\zeta(2x)}.$$

D - Deux variables indépendantes suivant une loi uniforme

Soient U_n et V_n deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$.
On note $W_n = U_n \wedge V_n$.

9. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, montrer que

$$P(W_n \in k\mathbb{N}^*) = \left(\frac{\lfloor n/k \rfloor}{n}\right)^2$$

On admet que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la suite $(P(W_n = k))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un réel ℓ_k.

10. Montrer que

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists M \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } \forall m \in \mathbb{N}^*,\ m \geqslant M \Rightarrow 1 - \varepsilon \leqslant \sum_{k=1}^{m} \ell_k \leqslant 1.$$

11. En déduire que $(\ell_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ définit une loi de probabilité sur $\mathbb{N}^*$.

On note W une variable aléatoire sur $\mathbb{N}^*$ qui suit cette loi de probabilité. En adaptant la méthode de la question 10, on peut établir que, pour toute partie B de $\mathbb{N}^*$, $P(W \in B) = \lim_{n\to+\infty} P(W_n \in B)$. On ne demande pas de démontrer ce résultat. Enfin, on admet le résultat suivant : si X et Y sont deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et si, pour tout $a \in \mathbb{N}^*$, $P(X \in a\mathbb{N}^*) = P(Y \in a\mathbb{N}^*)$, alors X et Y suivent la même loi de probabilité.

12. Préciser la loi de W. En considérant ℓ_1, que peut-on alors en conclure ?

Exercice II

Dans tout cet exercice n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.
La première partie étudie le résultant de deux polynômes, dans les parties suivantes on s'intéresse aux propriétés topologiques de certains sous-ensembles de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

Partie I - Résultant de deux polynômes :

1. Soient $p, q \in \mathbb{N}$. On note $E = \mathbb{C}_{q-1}[X] \times \mathbb{C}_{p-1}[X]$ et $F = \mathbb{C}_{p+q-1}[X]$.
   Soient $P \in \mathbb{C}_p[X]$ et $Q \in \mathbb{C}_q[X]$.
   Soit $u_{p,q,P,Q}$ l'application de E dans F définie par : $u_{p,q,P,Q} : (U, V) \mapsto PU + QV$.

   a) Justifier que $u_{p,q,P,Q}$ est une application linéaire.

   b) On note $\mathscr{B} = ((1,0),(X,0),\ldots,(X^{q-1},0)(0,1),(0,X),\ldots,(0,X^{p-1}))$ qui est une base de E, et $\mathscr{B}' = (1, X, \cdots, X^{p+q-1})$ la base canonique de F.
   On note
   $$P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k \text{ et } Q = \sum_{k=0}^{q} b_k X^k$$
   Montrer que la matrice de $u_{p,q,P,Q}$ par rapport aux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ est égale à
   $$M_{p,q,P,Q} = \begin{pmatrix} a_0 & & & & b_0 & & \\ a_1 & \ddots & & & b_1 & \ddots & \\ \vdots & & a_0 & & \vdots & & b_0 \\ a_p & & a_1 & a_0 & \vdots & & b_1 \\ & \ddots & \vdots & a_1 & b_q & & \vdots \\ & & a_p & \vdots & & \ddots & \vdots \\ & & & a_p & & & b_q \end{pmatrix}$$

2. Soient $P, Q \in \mathbb{C}[X]$ deux polynômes tous deux non nuls. On note p et q les degrés respectifs de P et Q.

   a) Montrer que $u_{p,q,P,Q}$ est bijective si et seulement si P et Q sont premiers entre eux.

   On pose :
   $$\boxed{Res(P,Q) = det(M_{p,q,P,Q}) \text{ (avec } p = deg(P) \text{ et } q = deg(Q))}$$

   b) Montrer que $\mathrm{Res}(P,Q) \neq 0$ si et seulement si P et Q sont premiers entre eux.

3. a) Démontrer qu'un polynôme P de $\mathbb{C}[X]$ admet une racine multiple dans $\mathbb{C}$ si et seulement si $\mathrm{Res}(P, P') = 0$.

   b) *Application* : déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que le polynôme X^3+aX+b admette une racine multiple.

   c) Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note Δ_n l'ensemble des polynômes de $\mathbb{C}_n[X]$ ayant n racines distinctes. Montrer que Δ_n est un ouvert de $\mathbb{C}_n[X]$.

Partie II - Matrices diagonalisables :
On note $D_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et $E_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ admettant n valeurs propres deux à deux distinctes.

4. Montrer que $E_n(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. En déduire que $D_n(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.
5. Montrer que l'application $M \mapsto \chi_M$ qui associe à une matrice M de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ son polynôme caractéristique dans $\mathbb{C}[X]$ est continue.
6. En déduire que $E_n(\mathbb{C})$ est ouvert dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.
7. a) Soit A la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ où on suppose que $\lambda_1 = \lambda_2$. Soit $\varepsilon > 0$, montrer qu'il existe $B \in B(A, \varepsilon)$ tel que B ne soit pas diagonalisable.
   b) Montrer que l'intérieur de $D_n(\mathbb{C})$ est $E_n(\mathbb{C})$.

Partie III - Classes de similitude : Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, on note C_A sa classe de similitude, c'est-à-dire l'ensemble des matrices qui sont semblables à A.

$$C_A = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \ , \ \exists P \in \mathsf{GL}_n(\mathbb{C}), P^{-1}MP = A\}$$

Soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$, on pose $P_\lambda \in \mathsf{GL}_n(\mathbb{C})$ la matrice définie par

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \ P_\lambda[i,j] = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ \lambda^i & \text{sinon.} \end{cases}$$

8. a) Soit $T \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice triangulaire supérieure. Donner l'expression des coefficients de la matrice $P_\lambda^{-1} T P_\lambda$ en fonction des coefficients de la matrice T.
   b) En déduire que si A est nilpotente alors la matrice nulle appartient à l'adhérence de C_A.
9. Montrer réciproquement que si $0 \in \overline{C_A}$ alors A est nilpotente.
   On pourra utiliser la question 5)
10. On suppose C_A est fermée. Montrer que A est diagonalisable.
    On pourra utiliser la même démarche qu'en 8)
11. On suppose que A est diagonalisable. On considère $B \in \overline{C_A}$ et note $(M_p)_{p \geqslant 0} \in C_A^{\mathbb{N}}$ telle que $(M_p) \to B$. On note π_A le polynôme minimal de A.
    a) Montrer que pour tout $p \geqslant 0$, $\pi_A(M_p) = 0$; en déduire que B est diagonalisable.
    b) Montrer que C_A est fermée