1 Première partie

1) Pour démontrer que $x \mapsto e^{-x}f(x)g(x)$ est intégrable (elle est continue sur $\mathbb{R}^+$ comme produit de telles applications) , nous allons majorer $x \mapsto e^{-x}|f(x)||g(x)|$ par une fonction intégrable . Par inégalité arithmético-géométrique on a :
$\forall x \in [0, +\infty[\quad e^{-x}|f(x)||g(x)| \leqslant \dfrac{e^{-x}(f(x)^2 + g(x)^2)}{2}$
Comme f et g sont dans F et que l'ensemble des fonctions intégrables sur $[0, +\infty[$ est un espace vectoriel , la fonction majorante est bien intégrable et par théorème de comparaison on a :

$$\boxed{x \longmapsto e^{-x}f(x)g(x) \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}^+}$$

2) a) Démontrons que F est un sous espace vectoriel de $\mathcal{C}^{\,0}([0, +\infty[\,, \mathbb{R})$:
Si f et g sont dans F et si $\alpha \in \mathbb{R}$, alors $t \mapsto e^{-x}(\alpha f(x)^2 = \alpha^2 e^{-x}(f(x)^2$ est intégrable et aussi , $e^{-x}\left(f(x) + g(x)\right)^2 = e^{-x}f(x)^2 + e^{-x}g(x)^2 + 2e^{-x}f(x)g(x)$ d'après la question précédente, comme combinaison linéaire de fonctions intégrables sur $\mathbb{R}^+$.
D'où :

$$\boxed{\text{F est un espace vectoriel}}$$

b) Démontrons que l'application ϕ de $F \times F$ vers $\mathbb{R}$ définie par
$(f, g) \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}f(t)g(t)dt$ a bien les propriétés qui en font un produit scalaire :
— symétrique : $(f|g) = (g|f)$ parce que le produit des réels $f(x)$ et $g(x)$ est commutatif pour tout t dans $\mathbb{R}^+$. .
— bilinéaire : grâce à la distributivité de $\times$ par rapport à $+$ dans les réels , puis à la linéarité de l'intégrale :
$\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}f(x)[\alpha g_1(x) + \beta g_2(x)]dx = \alpha \int_0^{+\infty} e^{-x}f(x)g_1(x)dx + \beta \int_0^{+\infty} e^{-x}f(x)g_2(x)dx$
On en déduit la bilinéarité par la symétrie.
— défini positif : L'application $x \mapsto e^{-x}\left(f(x)\right)^2$ est $\boxed{\text{continue}}$ et positive sur $[0, +\infty[$, alors
$\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\left(f(x)\right)^2 dx \geqslant 0$ et
$\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\left(f(x)\right)^2 dx = 0 \Longrightarrow \forall x \in [0, +\infty[\;\; e^{-x}\left(f(x)\right)^2 = 0 \Longrightarrow \forall x \in [0, +\infty[\;\; f(x) = 0.$ (car $e^{-x} > 0$ pour tout x)

3) a) • Soit $n \in \mathbb{N}$; $\varphi_n \; : \; x \longmapsto x^n e^{-x}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$;
$x^2\, \varphi_n(x) = x^{n+2}e^{-x} \longrightarrow 0$ quand x tend vers $+\infty$ car $-1 < 0$.
Ainsi $\varphi_n(x) = o_{x \to +\infty}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$, $x \longmapsto \dfrac{1}{x^2}$ est continue, positive et intégrable sur $[1, +\infty[$ car $2 > 1$ (fonction de Riemann), et on peut conclure que φ_n est intégrable sur $[1, \infty[$, et donc sur $[0, +\infty[$.
• Soit p une fonction polynômiale ; $p^2 \; : \; x \longmapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{p} b_k x^k$ en est une également, et
$\forall x \in \mathbb{R}^+$, $e^{-x}(p(x))^2 = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} b_k\, \varphi_k(x)$ est donc intégrable sur $\mathbb{R}^+$ comme combinaison linéaire de telles applications par le premier point.
Ainsi, $E \subset F$.

b) Soit $X > 0$; par intégration par partie (les fonctions sont de classe c^1 sur $[0, X]$), on a pour $n \geqslant 1$:
$\displaystyle\int_0^X \varphi_n(x)\,dx = \left[-x^n\ e^{-x}\right]_0^X + n \int_0^X \varphi_{n-1}(x)\,dx = -X^n e^{-X} + n \int_0^X \varphi_{n-1}(x)\,dx$ car $0^n = 0$ comme $n \geqslant 1$.

Or $\lim_{X\to+\infty} X^n\ e^{-X} = 0$ car $-1<0$, donc en faisant tendre X vers $+\infty$,

on obtient donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi_n(x)\,dx = n\int_0^{+\infty} \varphi_{n-1}(x)\,dx$, soit $I_n = nI_{n-1}$ si $n \geqslant 1$; ainsi $I_n = n!\ I_0$.

Or $\displaystyle\int_0^X \varphi_0(t)\,dt = 1-e^{-X}$ qui tend vers 1 quand X tend vers $+\infty$, ainsi $I_0 = 1$ et donc $\boxed{I_n = n!}$.

4) a) On obtient aisément par des calculs directs ou la formule de Leibnitz :

$\boxed{L_0 = 1\ ,\ L_1(X) = 1-X,\ L_2(X) = X^2-4X+2,\ L_3 = -X^3+9X^2-18X+6}$.

b) Utilisons la formule de Leibnitz pour calculer $\varphi_n^{(n)}$ à partir de $\varphi_n(t) = e^{-x}\ x^n$:

Il est plus habile de dériver $n-k$ fois $x \longmapsto x^n$, dont la dérivée $n-k$ième est :

$x \longmapsto n.(n-1)\cdots(n-(n-k)+1)x^{n-(n-k)} = n.(n-1)\cdots(k+1)x^k = \dfrac{n!}{k!}$

alors que la dérivée $k$ième de $x \longmapsto e^{-x}$ est $x \longmapsto (-1)^k\ e^{-x}$:

$\forall x \in [0,+\infty[\ \ \varphi_n^{(n)}(x) = e^{-x}\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k\frac{n!}{k!}x^k\right)$. On a donc

$$\forall x \in [0,+\infty[\quad L_n(x) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k(n-k)!\left(\frac{n!}{k!}\right)^2 x^k$$

On a bien : L_n est une fonction polynomiale, son degré est n et le coefficient de degré k est :

$$\boxed{a_{n,k} = (-1)^k(n-k)!\left(\frac{n!}{k!}\right)^2}$$

Les vérifications sont laissées au lecteur.

5) a) En utilisant toujours la formule de Leibnitz pour calculer la dérivée kième de φ_n (attention il faut changer d'indice de sommation, et on dérive seulement $k-j$ fois $x \longmapsto x^n$) on a pour $k<n$ on a :

$$\forall x \in [0,+\infty[\quad \varphi_n^{(k)}(x) = e^{-x}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(-1)^j\frac{n!}{((n-(k-j))!}x^{n-(k-j)} =$$

$$= e^{-x}x^{n-k}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(-1)^j\frac{n!}{(n-k+j)!}x^j.$$

$\varphi_n^{(k)}$ est donc le produit de e^{-x} par une fonction polynôme Q divisible par x^{n-k} :

$Q(x) = x^{n-k}\displaystyle\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(-1)^j\frac{n!}{(n-k+j)!}x^j$, c'est à dire, comme $n-k \geqslant 1$:

$$\boxed{\forall k<n\ \ \varphi_n^{(k)}(0) = 0}$$

b) On a immédiatement, par l'expression ci-dessus : $\boxed{\varphi_n^{(k)}(x)\ \underset{+\infty}{\sim}\ (-1)^k\ x^n\ e^{-x}}$

(le terme de plus haut degré de $q(x)$ donne l'équivalent de $Q(x)$ au voisinage de $+\infty$).

c) Considérons $m<n$ et écrivons $(L_n|L_m) = \displaystyle\int_0^{+\infty} L_m(x)\varphi_n^{(n)}(x)dx$

On effectue une intégration par partie : les applications considérées sont de classe c^1 sur $[0,X]$ si $X>0$:

$$\int_0^X L_m(x)\varphi_n^{(n)}\,dx = \Big[L_m(x)\varphi_n^{(n-1)}\Big]_0^X - \int_0^X L'_m(x)\varphi_n^{(n-1)}\,dx =$$

$$= L_m(X)\varphi_n^{(n-1)}(X) - L_m(0)\varphi_n^{(n-1)}(0) - \int_0^X L'_m(x)\varphi_n^{(n-1)}\,dx$$

Or par 4) b) et 5) b), $L_m(X)\varphi_n^{(n-1)}(X) \underset{+\infty}{\sim} (-1)^{m+n-1}X^{m+n}e^{-X} \longrightarrow 0$ quand X tend vers $+\infty$.

De plus, $L_m(0)\varphi_n^{(n-1)}(0) = L_m(0)\ .\ 0 = 0$ par 5) a) car $n-1<n$.

En faisant tendre X vers $+\infty$, on a : $(L_m|L_n) = -\displaystyle\int_0^{+\infty} L'_m(x)\varphi_n^{(n-1)}(x)dx$.

En faisant une nouvelle intégration par partie, puis un passage à la limite on a :

$(L_m|L_n) = (-1)^2\displaystyle\int_0^{+\infty} L_m^{(2)}(x)\varphi_n^{(n-2)}(x)dx$

(les arguments sont les mêmes : $L'_m(X)\varphi_n^{(n-2)}(X) \underset{+\infty}{\sim} m\ (-1)^{m+n-2}X^{m-1+n}e^{-X} \longrightarrow 0$ quand X tend vers $+\infty$ et $L'_m(0)\varphi_n^{(n-2)}(0) = L'_m(0)\ .\ 0 = 0$ par 5) a) car $n-2<n$).

En faisant n intégrations par parties en tout on a $(L_m|L_n) = (-1)^n \displaystyle\int_0^{+\infty} L_m^{(n)}(x)\varphi_n(x)dx$

Si $m<n$ alors $L_m^{(n)} = 0$ car L_m est de degré m.

Ainsi $\boxed{(L_m|L_n)=0}$ si $m<n$.

d) Si $m=n$, remarquant que $L_n^{(n)} = (-1)^n n!$ car L_n est de degré n et son coefficient dominant est $(-1)^n$, on obtient :

$(L_n|L_n) = (-1)^n\ (-1)^n\ n!\displaystyle\int_0^{+\infty}\varphi_n(x)dx = \boxed{n!\ I_n = (n!)^2}$ par 3) b).

6) On a : $\left(\dfrac{L_n}{n!}|\dfrac{L_m}{m!}\right) = \begin{cases} 0 & si\ n\neq m \\ 1 & si\ n=m\end{cases}$, donc

$\boxed{\text{la famille } \left(\dfrac{L_k}{k!}\right)_{0\leqslant k\leqslant n} \text{ est une base orthonormale de } E_n}$ puisqu'elle est orthonormale de longueur $n+1 = dim(E_n)$.

7) a) P_n est une somme de polynômes de degré $n+2$: il est de degré au plus $n+2$.

D'après le calcul des coefficients de L_n faits en 4) :

- le coefficient de x^{n+2} est : $(-1)^{n+2}+(-1)^{n+1} = 0$.
- le coefficient de x^{n+1} est : $(-1)^{n+1}(n+2)^2+(-1)^n(n+1)^2-(2n+3)(-1)^{n+1} = (-1)^{n+1}(n^2+4n+4-n^2-2n-1-2n-3) = 0$.

$$\boxed{P_n\in E_n}$$

On sait que $\boxed{\alpha_k = \left(\dfrac{L_k}{k!}|P_n\right)}$ car la base est orthonormale.

b) $Q\in E_n = vect\,(L_0,\cdots,L_n)$ donc $(Q|L_{n+1}) = 0$ car $(L_0,\cdots,L_{n+1})$ est une famille orthonormale.

c) • $(X\ Q|R) = \displaystyle\int_0^{+\infty} xQ(x)R(x)e^{-x}\,dx = \int_0^{+\infty} Q(x)(xR(x))e^{-x}\,dx = (Q|X\ R)$

• Si $k\leqslant n-1$, $(X\ L_{n+1}|L_k) = (L_{n+1}|X\ L_k) = 0$ par b) car $deg(X\ L_k) = k+1\leqslant n$ et donc $X\ L_k\in E_n$.

d) Si $k\in[\![0,n-1]\!]$, $P_n = L_{n+2}+(X-2n-3)L_{n+1}$ d'où par bilinéarité du produit scalaire :

$(P_n|L_k) = (L_{n+2}|L_k)+(X\ L_{n+1}|L_k)-(2n+3)(L_{n+1}|L_k)$.

Par 6) et 7 c), on a donc $\alpha_k = \dfrac{1}{k!}(P_n|L_k) = 0$.

e) Par 4) b), $L_{n+1}+XL_n = (-1)^{n+1}X^{n+1}+(-1)^nX\ .\ X^n+T = T$ avec $T\in E_n$, d'où le résultat.

$(P_n|L_n) = (L_{n+2}|L_n)+(X\ L_{n+1}|L_n)-(2n+3)(L_{n+1}|L_n) = 0+(X\ L_{n+1}|L_n)+0 = (L_{n+1}|X\ L_n)$

Ainsi : $(P_n|L_n) = (L_{n+1}|T-L_{n+1}) = (L_{n+1}|T)-(L_{n+1}|L_{n+1}) = 0-((n+1)!)^2 = -((n+1)!)^2$ par 6) et 7) b).

Donc $\alpha_n = \dfrac{1}{n!}(P_n|L_n) = -\dfrac{((n+1)!)^2}{n!}$.

Finalement, $P_n = L_{n+2}+(X-2n-3)L_{n+1} = -\dfrac{((n+1)!)^2}{n!}\dfrac{L_n}{n!} = -(n+1)^2\ L_n$, et donc

$$\boxed{\forall x \in [0,+\infty[\quad L_n+2(x)+(x-2n-3)L_n+1(t)+(n+1)^2L_n(x)=0}$$

8) a) $\forall x \in [0,+\infty[\ ,\ \varphi_{n+1}(t) = x\varphi_n(x)$.
En appliquant la formule de Leibniz, calculons la dérivée $(n+1)^{ième}$ de φ_{n+1} :
$\forall x \in [0,+\infty[\ ,\ \varphi_{n+1}^{(n+1)}(x) = x\varphi_n^{(n+1)}(x) + \binom{n+1}{1}\varphi_n^{(n)}(x) = x\varphi_n^{(n+1)}(x) + (n+1)\varphi_n^{(n)}(x)$
$\forall x \in [0,+\infty[\ ,\ \varphi_n^{(n)}(x) = e^{-x}L_n(x)$ donne par dérivation : $\varphi_n^{(n+1)}(x) = e^{-x}\left(L_n'(x) - L_n(x)\right)$
On en déduit L_{n+1} en fonction de L_n et de L_n' :
$\forall x \in [0,+\infty[\ ,\ L_{n+1}(x) = e^x\varphi_{n+1}^{(n+1)}(x) = x\left(L_n'(x) - L_n(x)\right) + (n+1)L_n(x)$, qui est la formule cherchée :
$\boxed{L_{n+1} = X.L_n' + (n+1-X)\,L_n}$

b) On sait d'après I7) :

$$L_{n+2} + (X-2n-3)\,L_{n+1} + (n+1)^2\,L_n = 0.$$

D'après a),

$$L_{n+2} = XL_{n+1}' + (n+2-X)\,L_{n+1}.$$

d'où

$$\begin{gathered} XL_{n+1}' + (n+2-X)\,L_{n+1} + (X-2n-3)\,L_{n+1} + (n+1)^2\,L_n = 0 \\ XL_{n+1}' + (-n-1))\,L_{n+1} + (n+1)^2\,L_n = 0 \end{gathered}$$

Or par a), on a :

$$L_{n+1} = X.L_n' + (n+1-X)\,L_n \text{ et donc } L_{n+1}' = XL_n'' + (n+2-X)L_n' - L_n$$

Remplaçant dans l'égalité précédente, il vient :

$$\begin{gathered} X^2L_n'' + X(n+2-X)L_n' - XL_n - (n+1)[XL_n' + (n+1-X)L_n] + (n+1)^2\,L_n = 0 \\ X^2L_n'' + X(1-X)L_n' + nXL_n = 0 \end{gathered}$$

Par intégrité de $\mathbb{R}[X]$, on peut simplifier par X :

$$XL_n'' + (1-X)\,L_n' + nL_n = 0$$

$\boxed{L_n \text{ est donc solution sur } [0,+\infty[\text{ de l'équation différentielle } (\varepsilon_n)\ :\ xz" + (1-x)z' + nz = 0}$

9) a)

$$L_n = (-1)^n \prod_{\lambda\in Z_n}(X-\lambda)^{m_\lambda} \prod_{\lambda\in\mathbb{R}\setminus Z_n}(X-\lambda)^{m_\lambda} \prod_i P_i$$

avec P_i unitaire de degré 2 irréductible sur $\mathbb{R}$
et m_λ pair si $\lambda > 0$
et m_λ impair si $\lambda \in \mathbb{Z}$
• Si Z_n est vide, avec des notations cohérentes :
L_n garde un signe constant sur $]0,+\infty[$ car tous les facteurs (sauf $(-1)^n$) dans la décomposition précédente sont positifs :
les P_i sont strictement positifs sur $\mathbb{R}$,
si $\lambda \leqslant 0$, $(X-\lambda)^{m_\lambda}$ est positif sur $\mathbb{R}^+$
et si $\lambda > 0$, m_λ est pair donc $(X-\lambda)^{m_\lambda}$ est positif sur $\mathbb{R}$.
• Or si $n \geqslant 1$, d'après 6), on a $(L_0|L_n) = 0$. Ainsi : $0 = (L_0|L_n) = \displaystyle\int_0^{+\infty} L_n(x)e^{-x}\,dx$.
Mais $x \longmapsto L_n(x)e^{-x}$ est continue sur $]0,+\infty[$, garde un signe constant sur $]0,+\infty[$, et donc y est identiquement nulle.
Comme $\exp > 0$, L_n est identiquement nulle sur $]0,+\infty[$, et donc $L_n = 0_{\mathbb{R}[X]}$ car $]0,+\infty[$ est infini.
Ceci est absurde, car L_n n'est pas le polynôme nul (par 4) b)).

b) On a $S_n \in \mathbb{R}_m[X] = vect\,(L_0, \cdots, L_m)$ donc $(S_n|L_n) = 0$ car on suppose $m < n$ et $(L_0, \cdots, L_n)$ est une famille orthonormale.
Dans les notations précédentes,

$$S_n L_n = (-1)^n \prod_{\lambda \in Z_n} (X-\lambda)^{m_\lambda+1} \prod_{\lambda \in \mathbb{R}\setminus Z_n} (X-\lambda)^{m_\lambda} \prod_i P_i$$

Les $m_\lambda + 1$ dans le premier produit sont pairs.
Par le même raisonnement qu'en a), on obtient que $S_n\ L_n$ est continue et de signe constant sur $]0, +\infty[$, et comme $0 = (S_n|L_n) = \displaystyle\int_0^{+\infty} S_n(x)L_n(x)e^{-x}\,dx$, on a aussi (même raisonnement également), que $S_n\ L_n = 0_{\mathbb{R}[X]}$; ceci est absurde, car S_n et L_n sont non nuls et $\mathbb{R}[X]$ intègre.
Ainsi $n \leqslant m$.

c) Ainsi L_n possède au moins n racines distinctes dans $]0, +\infty[$ d'ordre de multiplicité impair, donc supérieur ou égal à 1. Or L_n est de degré n, et donc L_n possède au plus n racines distinctes d'ordre de multiplicité 1 : finalement L_n possède donc exactement n racines distinctes simples, qui sont toutes dans $]0, +\infty[$.

2 Deuxième partie

1) f_a est toujours continue sur $[0, +\infty[$ et donc $g : x \mapsto e^{-x}(f_a(x))^2 = e^{-(1+2a)x}$ l'est aussi. Si $1+2a > 0$ alors $g(x) = o_{x\to+\infty}(\frac{1}{x^2})$ car $x^2 e^{-(1+2a)x} \underset{x\to+\infty}{\to} 0$, donc g est intégrable sur $[0, +\infty[$. Si $1+2a \leqslant 0$ alors $1 = O_{x\to\infty}(g(x))$ donc g n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (sinon $x \mapsto 1$ serait intégrable au voisinage de $+\infty$). Ainsi

$$\boxed{D =]-\tfrac{1}{2}, +\infty[}$$

2) a) i) $(L_k|f_a) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-ax}\varphi_k^{(k)}(x)dt$ se calcule par k intégrations par parties successives comme plus haut.
On montre par récurrence que pour tout $h \in \{0, ...k\}$, $(L_k|f_a) = a^h \int_0^{+\infty} e^{-ax}\varphi_k^{(k-h)}(x)dx.$.
Le résultat est évident pour $h = 0$, et supposant le résultat vrai au rang h, on a

$$\begin{aligned}(L_k|f_a) &= a^h \lim_{A\to+\infty}\left([\varphi_k^{(k-h-1)}(x)e^{-ax}]_0^A - \int_0^A \varphi_k^{(k-h-1)}(x)(-a)e^{-ax}dx\right) \\ &= a^{h+1}\int_0^{+\infty} \varphi_k^{(k-h-1)}(x)e^{-ax}dx\end{aligned}$$

car :
•$\varphi_k^{(k-h-1)}(x)e^{-ax} = 0$ pour $x = 0$ (question 5a)
•$\varphi_k^{(k-h-1)}(x)e^{-ax} \underset{x\to+\infty}{\sim} cte.x^{h+1}e^{-x}e^{-ax}$ (question 5b) donc $\varphi_k^{(k-h-1)}(A)e^{-aA} \underset{A\to+\infty}{\to} 0$ puisque $a+1 > -\frac{1}{2}+1 > 0$.
• $\int_0^A \varphi_k^{(k-h-1)}(x)(-a)e^{-ax}dx \underset{A\to+\infty}{\to} \int_0^{+\infty} \varphi_k^{(k-h-1)}(x)(-a)e^{-ax}dx$ comme limite de l'intégrale d'une fonction intégrable (car continue et équivalente à l'infini à $cte.x^{k-h-1}e^{-(a+1)x} = o_{x\to\infty}(\frac{1}{x^2})$ puisque
$x^{k-h-1+2}e^{-(a+1)x} \underset{x\to+\infty}{\to} 0$)
Pour $h = k$, on obtient le résultat demandé.

ii) En faisant le changement de variable $u = (a+1)x,\ x = \frac{u}{a+1},\ dx = \frac{du}{a+1}$, bijectif de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}^+$ vers lui-même (car $a+1 > 0$), on obtient :

$$(L_k|f_a) = a^k \int_0^{+\infty} \frac{u^k}{(a+1)^k}e^{-u}\frac{du}{a+1} = \frac{a^k}{(a+1)^{k+1}}I_k = \frac{a^k}{(a+1)^{k+1}}k!$$

b) E_n est un espace vectoriel de dimension finie dont nous connaissons une base orthonormale. Nous savons calculer les coordonnées du projeté orthogonal de f_a . C'est :

$S_{n,a} = \sum_{j=0}^{n} \gamma_j \frac{L_j}{j!}$ et $\gamma_j = \left(f_a | \frac{L_j}{j!}\right) = \frac{1}{j!}(L_j|f_a) = \frac{a^j}{(a+1)^{j+1}}$

$$\boxed{S_{n,a} = \sum_{j=0}^{n} \frac{a^j}{(a+1)^{j+1}} \frac{L_j}{j!}}$$

c) Par calcul direct : $\|f_a)\|^2 = \int_0^{+\infty} e^{-(2a+1)t} dt = \boxed{\frac{1}{2a+1}}$.

d) La base est orthonormale , alors le carré scalaire vaut $\|S_{n,a}\|^2 = \sum_{j=0}^{n} (\gamma_j)^2$.

$\|S_{n,a}\|^2$ est une somme de termes d'une suite géométrique de raison $q = \frac{a^2}{(a+1)^2}$ et on a $1 - q = \frac{2a+1}{(a+1)^2} > 0$ puisque $a \in D$.

$\boxed{\|S_{n,a}\|^2 = \sum_{j=0}^{n} \frac{a^{2j}}{(a+1)^{2j+2}} = \frac{1}{(a+1)^2} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1-\left(\frac{a}{a+1}\right)^{2(n+1)}}{2a+1} \underset{n\to+\infty}{\rightarrow} \frac{1}{2a+1}}$ car $1 - q > 0$ d'où $0 \leqslant q < 1$.

e) $S_{n,a}$ et $f_a - S_{n,a}$ sont orthogonaux car le premier terme est dans E_n et le second dans $E_n^{\perp}$. Le théorème de Pythagore nous donne donc :

$$\|f_a\|^2 = \|S_{n,a}\|^2 + \|f_a - S_{n,a}\|^2 .$$

Ainsi

$$||f_a - S_{n,a}||^2 \underset{n\to\infty}{\rightarrow} \frac{1}{2a+1} - \frac{1}{2a+1} = 0$$

Par continuité en 0 de la fonction racine carrée.

$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \|f_a - S_{n,a}\| = 0.}$ c'est-à-dire que $(S_{n,a})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f_a au sens de la norme $||.||$.

3) Nous avons calculé les coefficients de L_n en I4) . On connaît $|a_{n,k}| = \left(\frac{n!}{k!}\right)^2 \frac{1}{(n-k)!} = \frac{n! C_n^k}{k!}$ et $k! \geqslant 1$.

a) Une série entière se dérive terme à terme sur son intervalle ouvert de convergence, alors :

$\forall t \in]-R_\lambda, R_\lambda[\quad G_\lambda(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{L_n(\lambda)}{n!} t^n$, $G'_\lambda(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{L_n(\lambda)}{(n-1)!} t^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{L_{n+1}(\lambda)}{n!} t^n$

et par addition des séries entières : $\forall t \in]-R_\lambda, R_\lambda[\ \ (1-2t+t^2)G'_\lambda(t) - (1-t-\lambda)G_\lambda(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^k$ avec

— $a_0 = L_1(\lambda) - (1-\lambda)L_0(\lambda) = 1 - \lambda - (1-\lambda) = 0$

— $a_1 = L_2(\lambda) - 2L_1(\lambda) - (1-\lambda)L_1(\lambda) - L_0 = L_2(\lambda) + (\lambda - 3)L_1(\lambda) - 1$ est nul d'après I7)

— $a_n = \frac{L_{n+1}(\lambda)}{n!} - 2\frac{L_n(\lambda)}{(n-1)!} + \frac{L_{n-1}(\lambda)}{(n-2)!} - (1-\lambda)\frac{L_n(\lambda)}{n!} + \frac{L_{n-1}(\lambda)}{(n-1)!} =$
$\frac{1}{n!}\left(L_{n+1}(\lambda) + (\lambda - 1 - 2n)L_n(\lambda) + (n(n-1) + n)L_n(\lambda)\right) = 0$ d'après I7).

$$\boxed{\forall t \in]-R_\lambda, R_\lambda[\quad (1-t)^2 G'_\lambda(t) - (1-t-\lambda)G_\lambda(t) = 0}$$

b) Nous devons calculer une primitive de $t \mapsto \frac{1-t-\lambda}{(1-t)^2} = \frac{1}{1-t} - \frac{\lambda}{(1-t)^2}$:

$t \mapsto \ln(\frac{1}{1-t}) - \frac{\lambda}{1-t}$ en est une . Les solutions de l'équation différentielle (E_λ) , sur $]-\infty, 1[$ sont colinéaires à $t \mapsto \dfrac{1}{1-t}e^{-\frac{\lambda}{1-t}} = y_0(t)$. Comme $y_0(0) = e^{-\lambda}$ et que $G_\lambda(0) = \dfrac{L_0(\lambda)}{0!} = 1$ on en déduit :

$$\boxed{\forall t \in \left]-\infty, 1\right[\cap \left]-R_\lambda, R_\lambda\right[\quad G_\lambda(t) = \frac{e^\lambda}{1-t} e^{-\dfrac{\lambda}{1-t}} = \frac{e^{\frac{-\lambda t}{1-t}}}{1-t}}$$

4) a) Puisque $\lambda \in [0, +\infty[$ on obtient par inégalité triangulaire :

$|L_n(\lambda)| = \left| \sum\limits_{k=0}^{n} a_{n,k}\lambda^k \right| \leqslant n! \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k \lambda^k = n!(1+\lambda)^n.$

b) On a la majoration du terme général : $\left| \dfrac{L_n(\lambda)}{n!} t^n \right| \leqslant ((1+\lambda)|t|)^n$. Le théorème de comparaison assure que pour $|t| < \dfrac{1}{1+\lambda}$, la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{L_n(\lambda)}{n!} t^n$ est absolument convergente, c'est à dire que cette série entière a un rayon de convergence $\boxed{R_\lambda \geqslant \dfrac{1}{1+\lambda} > 0.}$

5) a) Soit $p \in \mathbb{N}$.

Comme la série $\sum_{n\geqslant 0} b_n t^n$ converge absolument, la famille $(b_n t^n)_{n\geqslant 0}$ est sommable.

Par théorème sur les produits de sommes de deux familles sommables (étendu par récurrence immédiate au cas de p familles), la famille $(b_{n_1}t^{n_1} \dots b_{n_p}t^{n_p})_{(n_1,\dots,n_p)\in \mathbb{N}^p}$ est $\boxed{\text{sommable}}$ et sa somme est égale à $\boxed{(f(t))^p}$.

b) Par sommation par paquets de nombres positifs et homogénéité de la sommation, on a dans $[0, +\infty]$:

$$\begin{aligned}
\sum_{p\in\mathbb{N},\ (n_1,\dots,n_p)\in N^p} \left| \frac{b_{n_1}\dots b_{n_p} t^{n_1+\dots+n_p}}{p!} \right| &= \sum_{p\in\mathbb{N}} \frac{1}{p!} \sum_{(n_1,\dots,n_p)\in N^p} |b_{n_1}\dots b_{n_p} t^{n_1+\dots+n_p}| \\
&= \sum_{p\in\mathbb{N}} \frac{1}{p!} K^p \text{ avec } K = \sum_{n=0}^{\infty} |b_n t^n| \text{ (même argument qu'en a))} \\
&= \exp(K) < +\infty
\end{aligned}$$

Donc la famille $\left(\frac{b_{n_1}\dots b_{n_p} t^{n_1+\dots+n_p}}{p!}\right)_{p\in\mathbb{N},\ (n_1,\dots,n_p)\in N^p}$ est $\boxed{\text{sommable}}$.

c) Par sommation par paquets d'une famille sommable et linéarité de la sommation, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{p\in\mathbb{N},\ (n_1,\dots,n_p)\in N^p} \left(\frac{b_{n_1}\dots b_{n_p} t^{n_1+\dots+n_p}}{p!} \right) &= \sum_{p\in\mathbb{N}} \frac{1}{p!} \sum_{(n_1,\dots,n_p)\in N^p} b_{n_1}\dots b_{n_p} t^{n_1+\dots+n_p} \\
&= \sum_{p\in\mathbb{N}} \frac{1}{p!} (f(t))^p \\
&= \exp(f(t))
\end{aligned}$$

Mais on a également par sommation par paquets :

$$\sum_{p\in\mathbb{N},\ (n_1,\dots,n_p)\in N^p} \left(\frac{b_{n_1}\dots b_{n_p} t^{n_1+\dots+n_p}}{p!} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$$

avec $\quad c_n = \sum\limits_{p\in\mathbb{N},\ n_1,\dots,n_p\in\mathbb{N} \text{ t.q. } n_1+\dots+n_p=n} b_{n_1}\dots b_{n_p}/p!.$

Ainsi $(\exp \circ f)(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$.

Donc $\boxed{\exp \circ f \text{ est développable en série entière sur }]-1, 1[}$.

d) Comme $t \mapsto \frac{-\lambda}{1-t}$ est développable en série entière sur $]-1,1[$, la fonction $t \mapsto \exp\left(\frac{-\lambda}{1-t}\right)$ l'est également d'après la question précédente.

On en déduit par produit de Cauchy que la fonction y_0 introduite dans la correction de la question II-3)d) est développable en série entière sur $]-1,1[$.

Or G_λ coïncide avec $e^\lambda y_0$ au voisinage de 0 car $R_\lambda > 0$ d'après la question 4). Par unicité du développement en série entière au voisinage de 0, les coefficients des développements en série entière de ces deux fonctions sont les mêmes. Or le rayon de convergence du développement de y_0 est au moins égal à 1.

Ainsi $\boxed{R_\lambda \geqslant 1}$.

6) Nous avons obtenu : $\forall x \in [0,+\infty[\quad S_{n,a}(x) = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} \frac{a^j}{(a+1)^{j+1}} \frac{L_j(x)}{j!} = \frac{1}{a+1} \sum_{j=0}^{n} \frac{L_j(x)}{j!} \left(\frac{a}{a+1}\right)^j$.

Nous reconnaissons une somme partielle de la série entière étudiée en 3) pour la valeur $t = \dfrac{a}{a+1}$ de la variable . Comme $\psi : a \mapsto \dfrac{a}{a+1} = 1 - \dfrac{1}{a+1}$ est strictement croissante sur $D = \left]-\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$, on a $t \in]\lim\limits_{-\frac{1}{2}} \psi, \lim\limits_{+\infty} \psi[=]-1,1[$. On en déduit que :

$\forall x \in [0,+\infty[\quad \lim\limits_{n\to\infty} S_{n,a}(x) = \dfrac{1}{a+1} G_x\left(\dfrac{a}{a+1}\right)$.

On remarque que $1 - t = \dfrac{1}{a+1}$, alors $G_x\left(\dfrac{a}{a+1}\right) = (a+1)e^{(a+1)\frac{-xa}{a+1}} = (a+1)e^{-ax}$

$$\boxed{\forall x \in [0,+\infty[\quad \lim_{n\to\infty} S_{n,a}(x) = e^{-ax}}$$

c'est-à-dire que la suite des fonctions $S_{n,a}$ $\boxed{\text{converge simplement}}$ vers f_a sur $[0,+\infty[$.