Partie I

1. (a) Si f est positive on sait que (i) est équivalent à (ii).
   (b) Si f n'est pas positive (i) implique (ii) mais la réciproque est fausse. L'exemple classique est $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$.
2. (a) On sait que $\mathscr{C}^0(\mathbf{R}_+, \mathbf{R})$ étant un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(\mathbf{R}_+, \mathbf{R})$, il suffit donc de montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^0(\mathbf{R}_+, \mathbf{R})$.
   La fonction nulle appartient à E donc $E \neq \emptyset$.
   Si $(f, g, \lambda) \in E \times E \times \mathbf{R}$, pour tout $x > 0$, les deux fonctions $t \mapsto f(t)\mathrm{e}^{-xt}$ et $t \mapsto g(t)\mathrm{e}^{-xt}$ sont intégrables sur $\mathbf{R}_+$ donc $t \mapsto \big(f(t) + \lambda g(t)\big)\mathrm{e}^{-xt}$ l'est aussi donc $f + \lambda g \in E$.
   Finalement, E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(\mathbf{R}_+, \mathbf{R})$.
   (b) On voit d'abord que $F = \mathscr{C}^0(\mathbf{R}_+, \mathbf{R}) \cap \mathscr{B}(\mathbf{R}_+, \mathbf{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(\mathbf{R}_+, \mathbf{R})$.
   Soit $f \in F$, on a $\forall x > 0,\ \forall t \in \mathbf{R}_+,\quad \left|f(t)\mathrm{e}^{-xt}\right| \leq \|f\|_\infty \mathrm{e}^{-xt}$ et $t \mapsto \mathrm{e}^{-xt}$ intégrable sur $\mathbf{R}_+$ donc $t \mapsto f(t)\mathrm{e}^{-xt}$ l'est aussi donc $f \in E$ et donc $F \subset E$.
   Donc F est un sous-espace vectoriel de E.
   (c) Par linéarité de l'intégrale, pour tout $(f, g, \lambda) \in E \times E \times \mathbf{R}$, et tout $x > 0$:
   $$\mathscr{L}(f+\lambda g)(x) = \int_0^{+\infty} \big(f(t)+\lambda g(t)\big)\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t + \lambda \int_0^{+\infty} g(t)\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t = \mathscr{L}(f)(x) + \lambda\mathscr{L}(g)(x)$$
   soit $\mathscr{L}(f + \lambda g) = \mathscr{L}(f) + \lambda\mathscr{L}(g)$. Donc $\mathscr{L} \in \mathscr{L}\left(E, \mathscr{F}(\mathbf{R}_+^*, \mathbf{R})\right)$.
3. (a) La fonction $\mathscr{U}$ appartient à F donc $\mathscr{U} \in E$ et $\forall x > 0,\ \mathscr{L}(\mathscr{U})(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{\mathrm{e}^{-xt}}{x}\right]_0^{+\infty}$ soit $\forall x > 0,\ \mathscr{L}(\mathscr{U})(x) = \frac{1}{x}$.
   (b) De même, $h_\lambda \in F$ car $\forall t \in \mathbf{R}_+,\ \left|h_\lambda(t)\right| \leq 1$ donc $h_\lambda \in E$.
   De plus
   $$\forall x > 0,\ \mathscr{L}(h_\lambda)(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(x+\lambda)t}\,\mathrm{d}t = \mathscr{L}(\mathscr{U})(x + \lambda)$$
   donc $\forall x > 0,\ \mathscr{L}(h_\lambda)(x) = \dfrac{1}{x + \lambda}$.
4. On remarque que $\dfrac{t^n\mathrm{e}^{-xt}}{\mathrm{e}^{-\frac{xt}{2}}} = t^n\mathrm{e}^{-\frac{xt}{2}} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $\exists A > 0,\ \forall t \geq A,\ \frac{t^n\mathrm{e}^{-xt}}{\mathrm{e}^{-\frac{xt}{2}}} \leq 1$.
   Cela implique $\exists A > 0,\ \forall t \geq A,\ t^n\mathrm{e}^{-xt} \leq \mathrm{e}^{-\frac{xt}{2}}$.
   Maintenant, $g_n \in \mathscr{C}^0(\mathbf{R}_+, \mathbf{R})$ et $\forall x > 0,\ g_n(t)\mathrm{e}^{-xt} = f(t)t^n\mathrm{e}^{-xt} = \underset{t\to+\infty}{O}\left(f(t)\mathrm{e}^{-\frac{xt}{2}}\right)$.
   De plus $t \mapsto f(t)\mathrm{e}^{-\frac{xt}{2}}$ est intégrable sur $\mathbf{R}_+$ donc $t \mapsto g_n(t)\mathrm{e}^{-xt}$ l'est aussi. Ainsi $g_n \in E$.
5. Déjà, f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}_+$ donc $f' \in \mathscr{C}^0(\mathbf{R}_+, \mathbf{R})$. Puisque f est croissante, on a $f' \geq 0$ donc $\forall x > 0,\ \forall t \in \mathbf{R}_+,\ f'(t)\mathrm{e}^{-xt} \geq 0$ et, selon 1.a), il suffit de montrer que $\displaystyle\int_0^y f'(t)\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t$ a une limite finie quand y tend vers $+\infty$ pour avoir $f' \in E$. Or, par intégration par parties,
   $$\int_0^y f'(t)\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t = \left[f(t)\mathrm{e}^{-xt}\right]_0^y + x\int_0^y f(t)\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t = f(y)\mathrm{e}^{-xy} - f(0) + x\int_0^y f(t)\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t\ .$$
   Or $f \in E$ implique, d'après 1.a), $\forall x > 0,\ \displaystyle\int_0^y f(t)\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t \underset{y\to+\infty}{\longrightarrow} \mathscr{L}(f)(x)$.

D'autre part, f étant bornée $\forall x > 0,\ \forall y \geq 0\ |f(y)\mathrm{e}^{-xy}| \leq \|f\|_\infty \mathrm{e}^{-xy} \underset{y\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

La limite du membre de droite existe donc quand y tend vers $+\infty$ ce qui donne $f' \in E$ et, pour $x > 0$, $\mathscr{L}(f')(x) = x\mathscr{L}(f)(x) - f(0)$.

6. (a) Soit $a > 0$. Appliquons le théorème de dérivation des intégrales à paramètre sur $[a, +\infty[$, en posant pour $(x, t) \in [a, +\infty[\times\mathbf{R}_+$, $\phi(x, t) = f(t)\mathrm{e}^{-xt}$:
   - Pour tout $x \in [a, +\infty[$, l'application $t \mapsto f(t)\mathrm{e}^{-xt}$ est continue (par morceaux) et intégrable sur $\mathbf{R}_+$,
   - Pour tout $(x, t) \in [a, +\infty[\times\mathbf{R}_+$, $\dfrac{\partial\phi}{\partial x}(x, t) = -tf(t)\mathrm{e}^{-xt} = -g_1(t)\mathrm{e}^{-xt}$ existe,
   - Pour tout $t \in \mathbf{R}_+$, $x \mapsto \dfrac{\partial\phi}{\partial x}(x, t)$ continue sur $[a, +\infty[$,
   - Pour tout $x \in [a, +\infty[$, l'application $t \mapsto \dfrac{\partial\phi}{\partial x}(x, t)$ est continue (par morceaux) sur $\mathbf{R}_+$,
   - Domination
   $\forall x \in [a, +\infty[,\ \forall t \in \mathbf{R}_+,\ \left|\dfrac{\partial\phi}{\partial x}(x, t)\right| \leq t\left|f(t)\right|\mathrm{e}^{-at} = \left|g_1(t)\right|\mathrm{e}^{-at}$ et, selon 4), $t \mapsto g_1(t)\mathrm{e}^{-at}$ est intégrable car $g_1 \in E$,

   donc $\mathscr{L}(f)$ est $\mathscr{C}^1$ sur $[a, +\infty[$ et

$$\forall x \in [a, +\infty[, \quad (\mathscr{L}(f))'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial\phi}{\partial x}(x, t)\,\mathrm{d}t = -\mathscr{L}(g_1)(x)$$

   Ceci étant vrai pour tout $a > 0$, $\mathscr{L}(f)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et $(\mathscr{L}(f))' = -\mathscr{L}(g_1)$.

   (b) Montrons par récurrence sur $n \in \mathbf{N}$ que $\mathscr{L}(f)$ est de classe $\mathscr{C}^n$ sur $]0, +\infty[$ et $(\mathscr{L}(f))^{(n)} = (-1)^n\mathscr{L}(g_n)$:

   $\longrightarrow$ pour $n = 0$, puisque, selon la question précédent, $\mathscr{L}(f)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$, à fortiori, $\mathscr{L}(f)$ est de classe $\mathscr{C}^0$ sur $]0, +\infty[$ et l'égalité est immédiate car $g_0 = f$;

   $\longrightarrow$ si le résultat est vrai pour n, en appliquant la question précédente à g_n qui appartient à E d'après 4), on obtient que $\mathscr{L}(g_n)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et $(\mathscr{L}(g_n))' = -\mathscr{L}(g_{n+1})$, car pour tout $t \in \mathbf{R}_+$, $g_n(t) = g_{n+1}(t)$.

   On a donc $\mathscr{L}(f)$ est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur $]0, +\infty[$ et $(\mathscr{L}(f))^{(n+1)} = (-1)^{n+1}\mathscr{L}(g_n)$.

   Ainsi $\mathscr{L}(f)$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$ et $\forall n \in \mathbf{N},\ (\mathscr{L}(f))^{(n)} = (-1)^n\mathscr{L}(g_n)$.

Partie II

7. (a) Soit $f \in F$. On a $\forall x > 0,\ \forall t \in \mathbf{R}_+,\ \left|f(t)\mathrm{e}^{-xt}\right| \leq \|f\|_\infty \mathrm{e}^{-xt}$ donc

$$\forall x > 0,\ |\mathscr{L}(f)(x)| = \left|\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_0^{+\infty} |f(t)|\,\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t \leq \|f\|_\infty \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t = \frac{\|f\|_\infty}{x},$$

   d'après 3.a). On en déduit que $\mathscr{L}(f)(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

   On peut aussi utiliser la version continue du théorème de convergence dominée.

   (b) On retrouve ici les hypothèses de la question 5) : f de classe $\mathscr{C}^1$, croissante et bornée. On a donc $\forall x > 0,\ x\mathscr{L}(f)(x) = \mathscr{L}(f')(x) + f(0)$. Mais, de plus, f' est bornée donc $f' \in F$ et donc, suivant la question précédente,

$$\mathscr{L}(f')(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

   et donc $x\,\mathscr{L}(f)(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} f(0)$.

8. (a) On a $f \in \mathscr{C}^0(\mathbf{R}_+, \mathbf{R})$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = \ell$ donc $\lim\limits_{t\to+\infty} \left|f(t)\right| = \left|\ell\right| < \left|\ell\right| + 1$ et donc $\exists A \in \mathbf{R}_+,\ \forall t \geq A,\quad \left|f(t)\right| \leq \left|\ell\right| + 1$. D'autre part, f est continue sur le segment $[0, A]$ donc elle y est bornée. On a ainsi $\forall t \in \mathbf{R}_+,\ \left|f(t)\right| \leq \max\left(\sup_{u\in[0,A]}\left|f(u)\right|, \left|\ell\right| + 1\right)$. Ainsi $f \in F$.

   (b) En effectuant le changement de variable affine $t = \frac{u}{x}$, $dt = \frac{1}{x}du$, on a

$$x\mathscr{L}(f)(x) = x\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t = x\int_0^{+\infty} f\left(\frac{u}{x}\right)\mathrm{e}^{-u}\,\frac{1}{x}\mathrm{d}u$$

   soit $x\mathscr{L}(f)(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} h(u)\,\mathrm{d}u$ avec $\forall u \in \mathbf{R}_+,\ h(u) = f\left(\frac{u}{x}\right)\mathrm{e}^{-u}$.

   (c) Comme le dit l'énoncé, utilisons le théorème de convergence dominée (version continue) :
   - Pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$, $u \mapsto f(\frac{u}{x})e^{-u}$ est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$.
   - Pour tout $u \in \mathbf{R}_+$, $h(u) \leqslant e^{-u}f(\frac{u}{x}) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \ell e^{-u}$
   - Domination : La fonction $\varphi : u \mapsto e^{-u}||f||_\infty$ est intégrable sur $\mathbf{R}_+^*$, et pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$, pour tout $u \in]0, +\infty[$, $|h(u)| \leqslant \varphi u$.

   On en déduit que

$$\lim_{x\to 0^+} x\mathscr{L}(f)(x) = \lim_{x\to 0^+}\int_0^{+\infty} e^{-u}f\left(\frac{u}{x}\right) = \ell\int_0^{+\infty} e^{-u} = \ell$$

   (d) Si $\ell \neq 0$,

$$\mathscr{L}(f)(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{\ell}{x}$$

9. (a) Puisque f est intégrable sur $\mathbf{R}_+$ donc aussi sur $[x, +\infty[$ pour $x \geq 0$, R est définie sur $\mathbf{R}_+$ et on a $\forall x \in \mathbf{R}_+$,

$$R(x) = R(0) - \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

   Or, f étant continue sur $\mathbf{R}_+$, $x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}_+$ et c'est une primitive de f. On a donc R est de classe C^1 sur $\mathbf{R}_+$ et $R' = -f$.

   On ne peut pas appliquer directement le résultat de la question 5) à R qui n'est pas croissante en général. Cependant, d'une part $R' = -f$ appartient à E car $f \in E$ (hypothèse de la partie), d'autre part, R est continue sur $\mathbf{R}_+$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} R(x) = 0 \in \mathbf{R}$ donc R appartient à F selon 8.a) et la démonstration de l'égalité au 5) n'utilise que que le caractère borné de la fonction f et le fait que f et f' soient dans E. Cette démonstration s'applique donc à R et donc $\mathscr{L}(f)(x) = R(0) - x\mathscr{L}(R)(x)$.

   (b) On a déjà indiqué ci-dessus que $\lim\limits_{t\to+\infty} R(t) = 0$ donc

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists A \in \mathbf{R}_+,\quad \forall t \geq A,\ \left|R(t)\right| \leq \varepsilon$$

On a donc, pour $x > 0$, selon a)

$$\begin{aligned}
\left|\mathscr{L}(f)(x) - R(0)\right| &= \left|x\mathscr{L}(R)(x)\right| = x\left|\int_0^{+\infty} R(t)\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t\right| \\
&\leq x\int_0^{+\infty}\left|R(t)\right|\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t \quad \text{car } R\in E \\
&\leq x\int_0^{A}\left|R(t)\right|\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t + x\int_A^{+\infty}\left|R(t)\right|\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t \\
&\leq x\int_0^{A}\left|R(t)\right|\mathrm{d}t + x\int_A^{+\infty}\varepsilon\,\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t \text{car } \mathscr{U}\in E \\
&\leq x\int_0^{A}\left|R(t)\right|\mathrm{d}t + x\int_0^{+\infty}\varepsilon\,\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

soit $\forall x > 0,\ \left|\mathscr{L}(f)(x) - R(0)\right| \leq x\int_0^{A}\left|R(t)\right|\mathrm{d}t + \varepsilon$.

(c) A étant fixé, $x\int_0^{A}\left|R(t)\right|\mathrm{d}t \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0$ donc

$$\exists\eta > 0,\ \forall x\in]0,\eta[,\quad 0 \leq x\int_0^{A}\left|R(t)\right|\mathrm{d}t \leq \varepsilon$$

donc $\forall x\in]0,\eta[,\ \left|\mathscr{L}(f)(x)-R(0)\right| \leq 2\varepsilon$. Donc $\mathscr{L}(f)$ se prolonge en 0 par $\mathscr{L}(f)(0) = \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Remarque : *Dans le cas où, comme ici, f est supposée intégrable sur $\mathbf{R}_+$, une simple application du théorème de convergence dominée donne le résultat ci-dessus. La démonstration proposée par l'énoncé a l'intérêt de s'appliquer aussi au cas où f n'est pas intégrable mais telle que l'intégrale $\int_0^{\infty} f$ converge.*