

Dans tout ce problème, on note :

- $\mathcal{F}(\mathbf{R}^+, \mathbf{R})$ l'ensemble des applications de \mathbf{R}^+ dans \mathbf{R} ;
- E l'ensemble des fonctions $f : \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}$, continues, telles que, pour tout $x > 0$ réel, la fonction $t \mapsto f(t)e^{-xt}$ soit intégrable sur \mathbf{R}^+ ;
- F l'ensemble des fonctions continues et bornées sur \mathbf{R}^+ .

Pour tout f dans E , on appelle **transformée de Laplace** de f et on note $\mathcal{L}(f)$ la fonction définie pour tout $x > 0$ réel par :

$$\mathcal{L}(f)(x) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt} dt.$$

1. Question préliminaire

Soient $a \in \mathbf{R}$ et $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue par morceaux.

Pour tout x dans $[a, +\infty[$, on pose : $F(x) = \int_a^x f(t)dt$.

On considère les propositions suivantes :

- (i) f est intégrable sur $[a, +\infty[$;
- (ii) F admet une limite finie en $+\infty$.

Donner, sans démonstration, toutes les implications possibles entre (i) et (ii) lorsque :

- (a) f est positive sur $[a, +\infty[$;
- (b) f n'est pas positive sur $[a, +\infty[$.

Partie I - Exemples et propriétés

- 2. (a) Démontrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbf{R}^+, \mathbf{R})$.
- (b) Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de E .
- (c) Justifier que \mathcal{L} est une application linéaire de E dans $\mathcal{F}(\mathbf{R}_*^+, \mathbf{R})$, espace vectoriel des applications de $]0, +\infty[$ dans \mathbf{R} .
- 3. (a) On considère $\mathcal{U} : \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}$ définie par $\mathcal{U}(t) = 1$. Déterminer $\mathcal{L}(\mathcal{U})$.
- (b) Soit $\lambda \geq 0$ réel. On considère $h_\lambda : [0, +\infty[\rightarrow \mathbf{R}$ définie pour tout $t \geq 0$ réel par :

$$h_\lambda(t) = e^{-\lambda t}.$$

Démontrer que h_λ est dans E et déterminer $\mathcal{L}(h_\lambda)$.

- 4. Soient f dans E et n dans \mathbf{N} . On considère $g_n : t \mapsto t^n f(t)$ de $[0, +\infty[$ dans \mathbf{R} .
Pour $x > 0$, justifier l'existence de $A > 0$ tel que $t^n e^{-xt} \leq e^{-\frac{xt}{2}}$ pour tout $t \geq A$.
En déduire que g_n est un élément de E .

5. Transformée de Laplace d'une dérivée

Soit f dans E de classe \mathcal{C}^1 , croissante et bornée sur $[0, +\infty[$. Démontrer que f' est encore dans E et que l'on a :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \mathcal{L}(f')(x) = x\mathcal{L}(f)(x) - f(0).$$

6. Régularité d'une transformée de Laplace

(a) Démontrer que, pour tout f dans E , la fonction $\mathcal{L}(f)$ est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, +\infty[$ et que l'on a :

$$\mathcal{L}(f)' = -\mathcal{L}(g_1)$$

où g_1 est définie à la question 4.

(b) Démontrer que, pour tout f dans E , la fonction $\mathcal{L}(f)$ est de classe \mathcal{C}^∞ sur $]0, +\infty[$ et pour $x > 0$ et $n \in \mathbf{N}$, déterminer $\mathcal{L}(f)^{(n)}(x)$ à l'aide d'une transformée de Laplace.

Partie II - Comportements asymptotiques de la transformée de Laplace

Dans toute cette partie, f est un élément de E

7. On suppose dans cette question que f est dans F .

(a) Déterminer la limite en $+\infty$ de $\mathcal{L}(f)$.

(b) *Théorème de la valeur initiale*

On suppose, de plus, que f est de classe \mathcal{C}^1 et croissante sur \mathbf{R}^+ , avec f' bornée sur \mathbf{R}^+ . Démontrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} x\mathcal{L}(f)(x) = f(0)$.

8. *Théorème de la valeur finale*

On suppose dans cette question que $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = l$ où l est un réel.

(a) Démontrer que f appartient à F .

(b) Démontrer que pour $x \in \mathbf{R}_*^+$, $x\mathcal{L}(f)(x) = \int_0^{+\infty} h(u)du$ où h est la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$h : u \mapsto e^{-u} f\left(\frac{u}{x}\right).$$

(c) En déduire, à l'aide du théorème de convergence dominée, que : $\lim_{x \rightarrow 0} x\mathcal{L}(f)(x) = l$.

(d) Lorsque $l \neq 0$, déterminer un équivalent de $\mathcal{L}(f)(x)$ en 0.

9. Dans cette question, on suppose que f est intégrable sur \mathbf{R}^+ et on pose : $R(x) = \int_x^{+\infty} f(t)dt$ pour tout x dans $[0, +\infty[$.

(a) Démontrer que R est une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, +\infty[$ et déterminer R' .

En déduire que, pour tout $x > 0$ réel, on a : $\mathcal{L}(f)(x) = R(0) - x\mathcal{L}(R)(x)$.

(b) On fixe $\varepsilon > 0$.

Justifier de l'existence de A réel positif tel que pour tout $t \geq A$, on ait : $|R(t)| \leq \varepsilon$.

En déduire que, pour tout $x > 0$, on a :

$$|\mathcal{L}(f)(x) - R(0)| \leq x \int_0^A |R(t)|dt + \varepsilon.$$

(c) Démontrer que $\mathcal{L}(f)$ se prolonge par continuité en 0 (on précisera la valeur en 0 de ce prolongement).