Exercice (Intégrale de Poisson)

On pose, pour x réel, $I(x) = \displaystyle\int_0^{\pi} \ln(1 - 2x\cos(t) + x^2)\ dt$.

1. *Justifier la définition de $I(x)$ et établir, pour x non nul,* $I\left(\dfrac{1}{x}\right) = I(x) - 2\pi \ln|x|$.
2. *Montrer que la fonction I est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1,1[$ et préciser I' sur cet intervalle. On pourra dans le calcul de I' poser $u = \tan\frac{t}{2}$.*
3. *En déduire la valeur de $I(x)$, pour tout réel x.*

Correction

1. Soit $t \in [0,\pi]$ on étudie les zéros du trinôme $1-2x\cos(t)+x^2$. On a $\Delta = 4\cos^2(t)-4 = -4\sin^2(t) \leqslant 0$. Les racines sont donc e^{it} et e^{-it}.

   En particulier, si $t \notin \{0,\pi\}$, $\Delta < 0$ et, pour tout x réel, $1 - 2x\cos(t) + x^2 > 0$. A l'inverse pour $t = 0$, $x = 1$ est racine double alors que pour $t = \pi$, c'est $x = -1$ qui est racine double.

   En conclusion :

   — Si $x \notin \{-1,1\}$, la fonction $t \mapsto \ln(1 - 2x\cos(t) + x^2)$ est continue sur $[0,\pi]$ et donc $I(x)$ est bien définie.

   — Si $x = 1$, la fonction $t \mapsto \ln(1 - 2x\cos(t) + x^2) = \ln(2 - 2\cos(t))$ est continue sur $]0,\pi]$. Au voisinage de 0^+,
   $$\ln(2-2\cos(t)) = \ln(2) + \ln\left(\frac{t^2}{2} + o\left(t^2\right)\right) = 2\ln(t) + \ln(1+o(1)) \sim 2\ln(t) = o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$$
   Comme $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ est intégrale sur $]0,1]$, $t \mapsto \ln(2-2\cos(t))$ aussi.

   — Si $x = -1$, la fonction $t \mapsto \ln(1 - 2x\cos(t) + x^2) = \ln(2 + 2\cos(t))$ est continue sur $[0,\pi[$. On étudie la fonction au voisinage de π^-. On pose $t = \pi - u$ et on se ramène à $u \mapsto \ln(2 + 2\cos(\pi-u)) = \ln(2-2\cos(u))$ quand $u \to 0^+$. On est ramené au cas précédent.

   La fonction I est définie sur $\mathbf{R}$.

   De plus, pour $x \neq 0$,
   $$I\left(\frac{1}{x}\right) = \int_0^{\pi} \ln\left(1 - \frac{2}{x}\cos(t) + \frac{1}{x^2}\right)\ \mathrm{d}t = \int_0^{\pi} \ln\left(\frac{1}{x^2}\right)\ \mathrm{d}t + I(x) = I(x) - 2\pi\ln|x|$$

2. On applique le théorème de caractère $\mathscr{C}^1$ des intégrales à paramètres. On pose $f : (x,t) \mapsto \ln(1 - 2x\cos(t) + x^2)$

   - On vient de voir que pour tout $x \in]-1,1[$, $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable.
   - Pour tout $t \in [0,\pi]$, $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et
   $$\forall x \in]-1,1[, \forall t \in [0,\pi], \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \frac{2x - 2\cos(t)}{1 - 2x\cos(t) + x^2}$$
   - Domination : Soit $[a,b] \subset]-1,1[$, la fonction $(x,t) \mapsto 1 - 2x\cos(t) + x^2$ est continue et ne s'annule pas. Comme $[a,b] \times [0,\pi]$ est un compact, d'après le théorème des bornes atteintes,

on peut poser $\alpha > 0$ tel que pour tout $(x,t) \in [a,b] \times [0,\pi]$, $1 - 2x\cos(t) + x^2 \geqslant \alpha$. On en déduit que

$$\left|\frac{2x - 2\cos(t)}{1 - 2x\cos(t) + x^2}\right| \leqslant \frac{2|x| + 2}{\alpha} \leqslant \frac{3}{\alpha}$$

La fonction $t \mapsto \frac{4}{\alpha}$ est intégrable sur $[0,\pi]$.

On en déduit que I est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1,1[$ et que

$$\forall x \in]-1,1[,\ I'(x) = 2\int_0^{\pi} \frac{x - \cos(t)}{1 - 2x\cos(t) + x^2}\,\mathrm{d}t$$

On pose $u = \tan\frac{t}{2}$. La fonction $t \mapsto \tan\frac{t}{2}$ est $\mathscr{C}^1$ strictement croissante et réalise une bijection de $]0,\pi[$ sur $]0,+\infty[$. De plus

$$\cos(t) = \frac{1-u^2}{1+u^2} \text{ et } \mathrm{d}u = \frac{1}{2}\left(1+u^2\right)\,\mathrm{d}t$$

On en déduit que

$$I'(x) = 4\int_0^{+\infty} \frac{x - \dfrac{1-u^2}{1+u^2}}{1 - 2x\dfrac{1-u^2}{1+u^2} + x^2}\frac{1}{1+u^2}\,\mathrm{d}u = 4\int_0^{+\infty} \frac{(x-1)+(x+1)u^2}{(1+u^2)((x-1)^2+(x+1)^2u^2)}\,\mathrm{d}u$$

On étudie la fraction rationnelle

$$F(X) = \frac{(x-1)+(x+1)X}{(1+X)((x-1)^2+X(x+1)^2)}$$

On suppose que $x \neq 0$ pour que $-\frac{(x-1)^2}{(x+1)^2} \neq -1$. On a alors

$$F(X) = \frac{a}{1+X} + \frac{b}{(x-1)^2+X(x+1)^2)}$$

où

$$a = \frac{1}{2x} \text{ et } b = \frac{x^2-1}{2x}$$

On en déduit que

$$I'(x) = \frac{2}{x}\left[\int_0^{\infty} \frac{1}{1+u^2}du + \int_0^{\infty} \frac{x^2-1}{(x-1)^2+(x+1)^2u^2}du\right]$$

D'où

$$I'(x) = \frac{2}{x}\left(\frac{\pi}{2} + [\arctan(u(x+1)/(x-1))]_0^{\infty}\right) = 0$$

La fonction I étant de classe $\mathscr{C}^1$, I' est continue et donc $I'(0) = 0$.

3. La fonction est constante sur $]-1,1[$ donc pour $x \in]-1,1[$, $I(x) = I(0) = 0$.
   En utilisant la formule obtenue à la question 1, on obtient que si $x \in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$,

$$I(x) = I(1/x) + 2\pi\ln|x| = 2\pi\ln|x|$$

Afin de conclure l'étude, il faut montrer que I est continue en 1 par exemple. On applique le théorème de continuité des intégrales à paramètres sur $[0,+\infty[$.

- Pour tout $t \in]0, \pi]$, $x \mapsto \ln(1 - 2x\cos(t) + x^2)$ est continue.
- Domination. Soit $a \geqslant 2$. On étudie, à t fixé, les variations de $\rho : x \mapsto 1 - 2x\cos t + x^2$. La dérivée est $-2\cos t + 2x$. On en déduit que la fonction est décroissante sur $[0, \cos t]$ et croissante sur $[\cos t, a]$.

x	0		$\cos(t)$		a
$\rho'(x)$		$-$	0	$+$	
$\rho(x)$	1	$\searrow$	$\sin^2 t$	$\nearrow$	$\rho(a)$

Comme $\rho(a) \geqslant 1$, on peut noter $b \in [\cos t, a]$ la valeur telle que $\rho(b) = 1$. en composant par ln et par la valeur absolue :

x	0		$\cos(t)$		b		a
$\lvert \ln(\rho(x) \rvert$	0	$\nearrow$	$-2\ln(\sin t)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\ln(\rho(a))$

On en déduit que

$$|\ln(1-2x\cos t+x^2)| \leqslant \max(-2\ln(\sin t), \ln(1-2a\cos t+a^2)) \leqslant -2\ln(\sin t)+\ln(1-2a\cos t+a^2)$$

La fonction $\varphi : t \mapsto -2\ln(\sin t) + \ln(1 - 2a\cos t + a^2)$ est intégrable sur $]0, \pi]$ car $t \mapsto \ln(1 - 2a\cos t + a^2)$ est prolongeable par continuité et $\ln(\sin t) \underset{t \to 0}{\sim} \ln(t)$ en procédant comme à la question 1.
On en déduit que $I(1) = I(-1) = 0$.