Théorème (Théorème de Schwarz)

Soit $f : U \longrightarrow F$ et $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E.

1. On suppose que f est classe $\mathscr{C}^2$ alors pour tout $(i, j) \in [\![1\,;\, p]\!]^2$,

$$\partial_{i,j} f = \partial_{j,i} f$$

2. Soit $k \geqslant 2$. On suppose que f est classe $\mathscr{C}^k$ alors pour tout $(i_1, \dots, i_k) \in [\![1\,;\, p]\!]^2$ et toute $\sigma \in \mathfrak{S}_k$,

$$\partial_{i_1,\dots,i_k} f = \partial_{i_{\sigma(1)},\dots,i_{\sigma(k)}} f$$

Démonstration :

1. Pour simplifier les notations on va faire la preuve pour une fonction f définie sur un ouvert U de $\mathbf{R}^2$. Soit $(x_0, y_0) \in U$. Soit h_x, h_y suffisamment petit, on applique le théorème des accroissements finis à $\alpha : x \longmapsto f(x, y_0 + h_y) - f(x, y_0)$. Il existe u compris entre 0 et h_x tels que

$$\begin{aligned} f(x_0+h_x, y_0+h_y) - f(x_0, y_0+h_y) - f(x_0+h_x, y_0) + f(x_0, y_0) &= \alpha(x_0+h_x) - \alpha(x_0) \\ &= h_x \alpha'(x_0+u) \\ &= h_x \left(\partial_x f(x_0+u, y_0+h_y) - \partial_x f(x_0+u, y_0)\right) \end{aligned}$$

En appliquant maintenant le théorème des accroissements finis à $\beta : y \longmapsto \partial_x f(x_0 + u, y)$, il existe v compris entre 0 et h_y tel que

$$\begin{aligned} f(x_0+h_x, y_0+h_y) - f(x_0, y_0+h_y) - f(x_0+h_x, y_0) + f(x_0, y_0) &= h_x(\beta(y_0+h_y) - \beta(y_0)) \\ &= h_x h_y \beta'(y_0+v) \\ &= h_x h_y \partial_{y,x} f(x_0+u, y_0+v) \end{aligned}$$

En procédant de même en considérant d'abord $\alpha' : y \longmapsto f(x_0 + h_x, y) - f(x_0, y)$ il existe v' compris entre 0 et h_y tel que

$$f(x_0+h_x, y_0+h_y) - f(x_0, y_0+h_y) - f(x_0+h_x, y_0) + f(x_0, y_0) = h_y \left(\partial_y f(x_0+h_x, y_0+v') - \partial_y f(x_0, y_0+v')\right)$$

On considère alors $\beta : x \longmapsto \partial_y f(x, y_0 + v')$ et on en déduit qu'il existe u' compris entre 0 et h_x tel que

$$f(x_0+h_x, y_0+h_y) - f(x_0, y_0+h_y) - f(x_0+h_x, y_0) + f(x_0, y_0) = h_x h_y \partial_{x,y} f(x_0+u', y_0+v')$$

On en déduit que

$$\partial_{y,x} f(x_0+u, y_0+v) = \partial_{x,y} f(x_0+u', y_0+v')$$

Il suffit alors de faire tendre (h_x, h_y) vers $(0, 0)$, on obtient que (u, v) et (u', v') tend vers $(0, 0)$. Par continuité de $\partial_{y,x} f$ et de $\partial_{x,y} f$ on obtient le résultat voulu.

2. Il suffit d'utiliser que le groupe symétrique $\mathfrak{S}_k$ est engendré par les transpositions de la forme $(i, i+1)$.

□