MP **2024 – 2025**

Exercices classiques

Révision Ecrits / Oraux

Préambule

Vous trouverez dans ce fascicule quelques exercices classiques qui reprennent la plupart des notions étudiées cette année afin de vous aider pour les révisions en vu de l'écrit et de l'oral.

- ce fascicule n'a pas vocation à être exhaustif.
- les exercices les plus classiques sont désignés par (♥).
- les exercices qui me semblent les plus difficiles sont désignés par (†).
- les exercices désignés par (👓) demandent de redémontrer des résultats de cours.

I - Algèbre linéaire

□ **Exercice I.1** Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

1) Soit $H_1, \dots H_p$ des hyperplans de E, montrer que $\dim\left(\bigcap_{i=1}^{p} H_i\right) \geqslant n - p$.
2) Réciproquement, montrer que tout sous-espace vectoriel de dimension d de E est l'intersection de $n - d$ hyperplans.

□ **Exercice I.2** (♥) Soit E un espace vectoriel et $u \in \mathscr{L}(E)$. On suppose que u stabilise toutes les droites vectorielles de E.

1) Pour tout $x \in E$, justifier qu'il existe $\lambda_x \in \mathbf{K}$ tel que $u(x) = \lambda_x x$.
2) Montrer que si x et y sont deux vecteurs et que (x, y) est libre alors $\lambda_x = \lambda_y$.
3) En déduire que u est une homothétie.

□ **Exercice I.3** Déterminer le centre de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ c'est-à-dire l'ensemble des matrices $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ telles que pour tout $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$, $AM = MA$.

□ **Exercice I.4** (👓) Décrire les opérations élémentaires sur les matrices à l'aide de multiplication à droite ou à gauche par des matrices à préciser.

□ **Exercice I.5** (†) Soit $n \in \mathbf{N}$. Pour tout $(i, j) \in [\![1\,;\, n]\!]^2$ avec $i \neq j$ et $\lambda \in \mathbf{K}$ on pose

$$T_{i,j}(\lambda) = I_n + \lambda E_{i,j} \text{ et } D_i(\lambda) = I_n + (\lambda - 1)E_{i,i}$$

Montrer que $\mathrm{SL}_n(\mathbf{K}) = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K}) \mid \det(M) = 1\}$ est engendré par les matrices de la forme $T_{i,j}(\lambda)$ et que $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ est engendré par les matrices de la forme $T_{i,j}(\lambda)$ et les matrices $D_i(\lambda)$.

□ **Exercice I.6** Soit $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$. Déterminer le rang, le déterminant et la trace de l'endomorphisme Φ de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ défini par $\Phi : M \mapsto AMB$.

□ **Exercice I.7** (👓) Justifier que si u est un endomorphisme diagonalisable et que F est stable par u alors l'endomorphisme induit $\check{u}$ est encore diagonalisable.

□ **Exercice I.8** Soit u un endomorphisme diagonalisable.

1) Décrire les sous-espaces stables par u à l'aide des espaces propres de u.
2) Décrire l'ensemble des endomorphismes v qui commutent à u.
3) Dans le cas où les valeurs propres de u sont simples montrer que les endomorphismes qui commutent à u sont les polynômes en u.

□ **Exercice I.9** Soit $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$ un polynôme unitaire de degré n à coefficients dans $\mathbf{K}$. On définit la matrice compagne de P par

$$C_P = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$$

1) Montrer que $\chi_{C_P} = P$.
2) Soit $X = (1, 0, \dots, 0)^\top \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})$. Calculer $I_n X, AX, \dots, A^{n-1}X$.
3) En déduire que π_{C_P} est de degré n.
4) Montrer que C_P est diagonalisable si et seulement si elle admet n valeurs propres distinctes.

□ **Exercice I.10** (♥) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ telle que $\mathrm{rg}(A) = 1$.

1) Montrer qu'il existe $X, Y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ tels que $A = XY^\top$.
2) Montrer que $A^2 = \mathrm{tr}(A)A$.
3) Déterminer χ_A, π_A en fonction de $\mathrm{tr}(A)$. La matrice A est-elle diagonalisable ?

□ **Exercice I.11** (†) Soit $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$. Montrer que $\chi_A = \chi_B$ si et seulement si pour tout $k \in \mathbf{N}$, $\mathrm{tr}(A^k) = \mathrm{tr}(B^k)$. En déduire un critère de nilpotence.

□ **Exercice I.12**

1) Donner deux matrices A, B vérifiant $\chi_A = \chi_B$ qui ne sont pas semblables.
2) Montrer que si A et B sont diagonalisables et si $\chi_A = \chi_B$ alors A et B sont semblables.

□ **Exercice I.13** (♥) Soit M_1 et M_2 deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ telles que $M_1M_2 = M_2M_1$.

1) a) Justifier que M_1 a au moins une valeur propre notée λ_1.
   b) Montrer que l'espace propre $E_{\lambda_1}(M_1) = \mathrm{Ker}(M_1 - \lambda_1 I_n)$ est stable par M_2, c'est-à-dire que pour tout $X \in E_\lambda(M_1), M_2X \in E_{\lambda_1}(M_1)$.
   c) En déduire qu'il existe un vecteur X non nul qui soit un vecteur propre de M_1 et de M_2.
   d) Montrer qu'il existe une matrice inversible P telle que

$$P^{-1}M_1P = \left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 & * \\ \hline 0 & \\ \vdots & A_1 \\ 0 & \end{array}\right) \text{ et } P^{-1}M_2P = \left(\begin{array}{c|c} \lambda_2 & * \\ \hline 0 & \\ \vdots & A_2 \\ 0 & \end{array}\right)$$

   où $\lambda_2 \in \mathbf{C}$ et que A_1 et A_2 commutent.
2) En utilisant une récurrence sur n, montrer qu'il existe une matrice inversible Q telle que $Q^{-1}M_1Q$ et $Q^{-1}M_2Q$ sont triangulaires supérieures.

□ **Exercice I.14** (♥) Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille d'endomorphismes d'un espace vectoriel E de dimension finie. On suppose que pour tout $(i,j) \in I^2$, $u_i \circ u_j = u_j \circ u_i$ et que pour tout $i \in I$, u_i est diagonalisable. Montrer qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que pour tout $i \in I$, $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(u_i)$ soit diagonale.

On pourra s'inspirer de l'exercice précédent.

□ **Exercice I.15** Soit G un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$. Montrer que tous ses éléments sont diagonalisables.

□ **Exercice I.16** (♥) Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

1) Donner l'expression du polynôme caractéristique χ_A de A.
2) Dans le cas où A est inversible donner la formule de A^{-1}.

□ **Exercice I.17** (👓) Soit $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbf{K}^n$.
On note $V \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ la matrice telle que pour tout $(i,j) \in [\![1 ; n]\!]^2$, $V[i,j] = \alpha_i^{j-1}$.

1) En se ramenant à un problème d'interpolation polynomiale, montrer que V est inversible si et seulement si les éléments $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sont deux à deux distincts.
2) Donner la formule de $\det(V)$.
3) Démontrer la formule. On pourra procéder par récurrence et étudier le polynôme

$$R(X) = \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \alpha_n & \cdots & \alpha_n^n \\ 1 & X & \cdots & X^n \end{vmatrix} \in \mathbf{K}_n[X]$$

□ **Exercice I.18** Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$.

Montrer que A est diagonalisable si, et seulement si, A^2 est diagonalisable et $\mathrm{Ker}(A^2) = \mathrm{Ker}(A)$.

□ **Exercice I.19** (♥) On pose $H \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.

1) Justifier que la matrice est diagonalisable.
2) Déterminer les éléments propres de la matrice H.
3) Calculer H^k pour tout $k \in \mathbf{N}$.
4) Calculer $\exp(H)$

□ **Exercice I.20** Soit a, b des réels et $n \geqslant 2$ un entier. On pose $A = \begin{pmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \cdots & b & a \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$.

1) Justifier que la matrice est diagonalisable.
2) Déterminer les éléments propres de la matrice A.
3) Calculer A^k pour tout $k \in \mathbf{N}$, et pour tout $k \in \mathbf{Z}$ si A est inversible.
4) Calculer $\exp(A)$

□ **Exercice I.21** (†) Montrer que deux matrices réelles qui sont semblables sur $\mathbf{C}$ sont semblables sur $\mathbf{R}$.

□ **Exercice I.22** (♥) Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 2$, et $u \in \mathscr{L}(E)$ nilpotent d'indice n.

1) Montrer l'existence d'un vecteur $x \in E$ tel que la famille $(u^{n-1}(x), \ldots, u(x), x)$ soit une base de E, et écrire la matrice de u dans cette base.
2) Montrer que les seuls sous-espaces de E stables par u sont les $\mathrm{Ker}(u^k)$ pour $k \in [\![0 ; n]\!]$.

□ **Exercice I.23** Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et $u \in \mathscr{L}(E)$.

1) Pour $k \in \mathbf{N}$, montrer l'équivalence des propositions :

(i) $\mathrm{Ker}(u^{k+1}) = \mathrm{Ker}(u^k)$	(ii) $\mathrm{Im}(u^{k+1}) = \mathrm{Im}(u^k)$
(iii) $\mathrm{rg}(u^{k+1}) = \mathrm{rg}(u^k)$	(iv) $\mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Im}(u^k) = \{0\}$

2) Montrer l'existence de $p \in \mathbf{N}$ telle que la suite $(\mathrm{rg}(u^k))_{k \in \mathbf{N}}$ soit strictement décroissante jusqu'au rang p, et constante ensuite.
3) Montrer que l'entier p est la multiplicité de 0 comme racine du polynôme minimal de u.

□ **Exercice I.24** (†) Soit $\mathbf{K}$ un corps fini de cardinal q. Déterminer le cardinal de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$.

□ **Exercice I.25** Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{Z})$. Montrer qu'elle est inversible dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{Z})$ si et seulement si $\det(A) = \pm 1$.

II - Algèbre bilinéaire

□ **Exercice II.26** On note $F = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R}) \mid \operatorname{tr}(M) = 0\}$ et $H \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ dont tous les coefficients valent 1.

Justfier que F est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$. Déterminer sa dimension et déterminer $d(H, F)$ (pour la norme euclidienne).

□ **Exercice II.27** Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$. Déterminer

$$\inf_{M \in S_n(\mathbf{R})} \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} (A[i,j] - M[i,j])^2$$

□ **Exercice II.28** Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{R})$. Montrer que $\operatorname{Ker}(A) = \operatorname{Ker}(A^\top A)$.

□ **Exercice II.29** (♥) Soit E un espace euclidien et p un projecteur. Montrer que $\|p\|_{\mathrm{op}} \leqslant 1$ si et seulement si p est un projecteur orthogonal.

□ **Exercice II.30** (♥) Soit E un espace euclidien et $(x_1, \ldots, x_p)$ une famille de vecteurs de E.

On note $G(x_1, \ldots, x_p) \in \mathscr{M}_p(\mathbf{R})$ la matrice définie par

$$\forall (i,j) \in [\![1\,;\, p]\!]^2,\ G(x_1, \ldots, x_p)[i,j] = (x_i | x_j)$$

1) Montrer que $\operatorname{rg}(G(x_1, \ldots, x_p)) = \operatorname{rg}(x_1, \ldots, x_p)$.
2) Dans le cas où $(x_1, \ldots, x_p)$ est libre, en notant $F = \operatorname{Vect}(x_1, \ldots, x_p)$ montrer que pour tout $u \in E$,

$$d(u,F)^2 = \frac{\det(G(x_1, \ldots, x_p, u))}{\det(G(x_1, \ldots, x_p))}$$

□ **Exercice II.31** Soit $E = \mathbf{R}[X]$. Pour P, Q dans E on pose $\langle P, Q \rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\mathrm{d}t$.

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose $L_n = ((X^2-1)^n)^{(n)}$.

1) Justifier que $(P,Q) \mapsto \langle P, Q \rangle$ est un produit scalaire.
2) Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $L_n \in \mathbf{R}_{n-1}[X]^\perp$.

   En déduire que $(L_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est une base orthogonale de E.
3) Soit $n \in \mathbf{N}$, calculer $\|L_n\|$. On pourra utiliser l'expression des intégrales de Wallis :

$$W_{2n+1} = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1}(t)\mathrm{d}t = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$$

□ **Exercice II.32** Même exercice en posant $\langle P, Q \rangle = \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)\mathrm{d}t$ et $L_n = (X^n(X-1)^n)^{(n)}$

□ **Exercice II.33** (†) Soit E un espace préhilbertien et $(e_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une famille orthonormée.

1) Soit $x \in E$, montrer que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (x|e_n)^2 \leqslant \|x\|^2$$

2) On note $F = \operatorname{Vect}((e_n)_{n \in \mathbf{N}})$. Montrer que pour $x \in E$,

$$x \in \overline{F} \iff \sum_{n=0}^{\infty} (x|e_n)^2 = \|x\|^2$$

□ **Exercice II.34** (♥) Soit E un espace euclidien. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $u^* = -u$.

1) Que dire de la matrice de u dans une base orthonormée ?
2) Montrer que $\mathrm{Sp}(u) \subset \{0\}$.
3) Montrer qu'il existe une base orthonormée $\mathscr{B}$ telle que $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(u)$ soit diagonale par blocs diagonaux avec des blocs nuls ou de la forme $\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$.

□ **Exercice II.35** Soit E un espace euclidien et $u \in \mathscr{L}(E)$.

1) Pour $x \in E$ un vecteur unitaire, montrer que $\|u(x)\|^2 \leqslant \|u\|_{\mathrm{op}} \|u(x)\| \|x\|$.
2) En déduire que $\|u\|_{\mathrm{op}} = \|u^*\|_{\mathrm{op}}$

□ **Exercice II.36** Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ une matrice symétrique réelle. On note $\lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$ les valeurs propres de A comptées avec multiplicités et rangées par ordre croissant.

Montrer que

$$\lambda_1 = \min\left\{\frac{X^\top AX}{\|X\|^2} ; X \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}\right\} \text{ et } \lambda_n = \max\left\{\frac{X^\top AX}{\|X\|^2} ; X \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}\right\}$$

□ **Exercice II.37** (†) Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ une matrice symétrique réelle. On note $\lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$ les valeurs propres de A comptées avec multiplicités et rangées par ordre croissant.

On note $X_1, \ldots, X_n$ une base de vecteurs propres de A de sorte que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $AX_i = \lambda_i X_i$. On fixe $k \in [\![1, n]\!]$ et on pose $F_k = \mathrm{Vect}(X_1, \ldots, X_k)$ et $G_k = \mathrm{Vect}(X_k, \ldots, X_n)$. On note alors $\mathscr{V}_k$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ de dimension k

1) Soit $Y \in F_k$ un vecteur unitaire. Montrer que $\langle AY, Y\rangle \in [\lambda_1, \lambda_k]$.
2) Que dire de $\langle AY, Y\rangle$ si Y est un vecteur unitaire de G_k ?
3) Soit $F \in \mathscr{V}_k$. Justifier qu'il existe un vecteur unitaire dans $F \cap G_k$.
4) En déduire que
$$\lambda_k = \min_{F \in \mathscr{V}_k} \left(\max_{Y \in F; \|Y\|=1} \langle AY, Y\rangle \right)$$

□ **Exercice II.38** (†) Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ une matrice symétrique réelle. On note $\|A\|_{\mathrm{op},2}$ la norme subordonnée à $\| \ \|_2$ de la matrice A.

Montrer que

$$\max_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} |\lambda| = \|A\|_{\mathrm{op},2}$$

□ **Exercice II.39** Soit $A \in S_n(\mathbf{R})$.

1) Montrer qu'il existe une matrice $M \in S_n(\mathbf{R})$ telle que $M^3 = A$.
2) (†) Montrer de plus que la matrice M est unique.
3) Que faut-il changer si on s'intéresse à la racine carrée ?

□ **Exercice II.40** Soit $A \in S_n^+(\mathbf{R})$. Montrer que les coefficients diagonaux sont positifs ou nuls.

□ **Exercice II.41** (♥) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$, montrer que $A^\top A \in S_n^+(\mathbf{R})$. Réciproquement, montrer que pour $M \in S_n^+(\mathbf{R})$, il existe $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ telle que $M = A^\top A$.

□ **Exercice II.42** (†) Soit A dans $S_n^{++}(\mathbf{R})$ et $B \in S_n(\mathbf{R})$. Montrer qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ et Δ une matrice diagonale telles que

$$A = P^\top P \text{ et } B = P^\top \Delta P$$

III- Algèbre générale

□ **Exercice III.43** Soit $\mathbf{K}$ un sous-corps de $\mathbf{C}$, $n, p \in \mathbf{N}^*$ et A, B deux polynômes de degré respectif n et p. On note $\Phi_{A,B} : \mathbf{K}_{p-1}[X] \times \mathbf{K}_{n-1}[X] \to \mathbf{K}_{n+p-1}[X]$ l'application définie par

$$\Phi_{A,B} : (U, V) \mapsto AU + BV$$

On note alors $\operatorname{Res}(A, B) = \det(\Psi_{A,B})$.

1) Écrire la matrice de $\Psi_{A,B}$ dans les bases canoniques.
2) Montrer que $\operatorname{Res}(A, B) \neq 0$ si et seulement si $A \wedge B = 1$.
3) Montrer que A a n racines distinctes dans $\mathbf{C}$ si et seulement si $\operatorname{Res}(A, A') \neq 0$.
4) En déduire que l'ensemble des polynômes scindés à racines simples est un ouvert relatif de l'ensemble des polynômes de degré n.

□ **Exercice III.44** On note $\Delta : \mathbf{R}[X] \to \mathbf{R}[X],\ P \mapsto P(X+1) - P(X)$.

1) Pour $P \in \mathbf{R}[X]$, déterminer le degré et le coefficient dominant de $\Delta(P)$ en fonction de celui de P. En déduire le noyau et l'image de Δ.
2) Montrer l'existence et l'unicité d'une famille de polynôme $(H_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telle que $H_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $H_n(0) = 0$ et $\Delta(H_n) = H_{n-1}$. Expliciter les H_n et montrer qu'ils forment une base de $\mathbf{Q}[X]$.
3) (†) Montrer qu'un polynôme P vérifie $P(\mathbf{Z}) \subset \mathbf{Z}$ si et seulement s'il est combinaison linéaire à coefficients entiers des H_n.

□ **Exercice III.45** (†)

1) Déterminer tous les sous-groupes de $(\mathbf{Z}, +)$, de $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}, +)$. Et les sous-anneaux ?
2) Montrer que les sous-groupes de $(\mathbf{R}, +)$ sont denses ou de la forme $a\mathbf{Z}$ pour $a \in \mathbf{R}^+$.

□ **Exercice III.46** (♥)

1) Montrer que pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, il existe un unique polynôme $T_n \in \mathbf{R}[X]$ tel que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $T_n(\cos(x)) = \cos(nx)$. Donner le degré et le coefficient dominant de T_n.
2) Déterminer une relation de récurrence entre que T_{n+2}, T_{n+1} et T_n.
3) Déterminer les racines de T_n.

□ **Exercice III.47** Soit $P \in \mathbf{C}[X]$ un polynôme non constant.

1) Donner la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle $\frac{P'}{P}$.
2) En déduire que les racines de P' sont des barycentres à coefficients positifs des racines de P.

□ **Exercice III.48** Déterminer la décomposition en éléments simples de $\frac{1}{X^n-1}$ sur $\mathbf{C}$ puis sur $\mathbf{R}$.

□ **Exercice III.49**

1) Montrer que $\mathbf{Z}[i] = \{a + ib\,;(a, b) \in \mathbf{Z}^2\}$ est un anneau.
2) Montrer que $N : z \mapsto |z|^2 = z\overline{z}$ induit une application de $\mathbf{Z}[i]$ dans $\mathbf{N}$ et que pour z, z' dans $\mathbf{Z}[i]$, $N(zz') = N(z)N(z')$.
3) En déduire que les inversibles de $\mathbf{Z}[i]$ sont $\{1, -1, i, -i\}$.
4) Justifier que pour z, z' dans $\mathbf{Z}[i]$ où $z' \neq 0$, il existe q, r dans $\mathbf{Z}[i]$ tels que $z = qz' + r$ et $N(r) < N(z')$.
5) En déduire que les idéaux de $\mathbf{Z}[i]$ sont principaux.

□ **Exercice III.50**

1) Énoncer et démontrer le théorème des restes chinois.
2) Trouver un entier n tel que $n \equiv 2\ [10]$, $n \equiv 7\ [13]$, $n \equiv 9\ [31]$.

□ **Exercice III.51** (†) Soit $x \in \mathbf{C}$. On pose

$$\mathbf{Q}[x] = \{P(x),\ P \in \mathbf{Q}[X]\} \quad \text{et} \quad I_x = \{P \in \mathbf{Q}[X],\ P(x) = 0\}$$

On dit que x est *algébrique* si et seulement s'il existe $P \in \mathbf{Q}[X]$ tel que $P \neq 0$ et $P(x) = 0$.

1) Montrer que si x est algébrique, alors :
   - Il existe un polynôme $\pi_x \in \mathbf{Q}[X]$ unitaire et irréductible sur $\mathbf{Q}$ tel que $I_x = \pi_x \mathbf{Q}[X]$.
   - $\mathbf{Q}[x]$ est un $\mathbf{Q}$-espace vectoriel de dimension finie.
   - $\mathbf{Q}[x]$ est un corps
2) Montrer que si $\mathbf{Q}[x]$ est un $\mathbf{Q}$-espace vectoriel de dimension finie, alors x est algébrique.
3) Soit $a, b \in \mathbf{C}$ des nombres algébriques. Montrer que la famille $(a^p b^q)_{p,q \in \mathbf{N}}$ est de rang fini sur $\mathbf{Q}$. En déduire que ab et $a + b$ sont algébriques.
4) Que dire de l'ensemble des nombres algébriques ?

IV : Familles sommables & Probabilités

□ **Exercice IV.52** Soit $x \in \mathbf{C}$. On dit que x est *algébrique* si et seulement s'il existe $P \in \mathbf{Q}[X]$ tel que $P \neq 0$ et $P(x) = 0$. Montrer que l'ensemble des nombres algébriques est dénombrable.

□ **Exercice IV.53** Soit $q \in \mathbf{C}$ tel que $|q| < 1$. Calculer la somme $S = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} nq^n$ à l'aide du théorème de sommation par paquets

□ **Exercice IV.54**

1) On tire 5 cartes au hasard dans un jeu de 52 cartes. Quelle est la probabilité d'obtenir un full ?
2) On lance 5 dés à 6 faces. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement 2 fois le chiffre 4 ?
3) Une urne contient 11 boules blanches et 9 noires. On tire 5 boules successivement, sans remise. Quelle est la probabilité que les deux premières boules tirées soient blanches sachant que la dernière est noire ?

□ **Exercice IV.55** Calculer les sommes suivantes :

$$\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p}; \qquad \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k}; \qquad \sum_{k=0}^{\lfloor n/3 \rfloor} \binom{n}{3k}; \qquad \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{3k}}{(3k)!}; \qquad \sum_{k=0}^{n} \binom{p}{k}\binom{q}{n-k}.$$

□ **Exercice IV.56** Montrer que, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\operatorname{ch} x \leqslant \exp(x^2/2)$.

□ **Exercice IV.57** Soit $(X_n)_{n \geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivantes toutes la loi de Bernoulli de paramètre p où $p \in]0, 1[$. On pose $T_0 = 0$ et, pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, T_k désigne la variable aléatoire définie par

$$T_k(\omega) = \min\{N \in \mathbf{N}^* \mid \#\{n \in [\![1 ; N]\!] \mid X_n(\omega) = 1\} = k\}$$

1) Décrire en français T_k. Déterminer la loi de T_1
2) Déterminer la loi de T_k. Montrer en particulier que T_k est presque surement finie.
3) Pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, on pose $U_k = T_k - T_{k-1}$. Déterminer la loi de $(U_1, \dots, U_m)$ pour $m \in \mathbf{N}^*$.
4) Que dire des variables aléatoires U_k ? En déduire $\mathbf{E}(T_k)$ et $\mathbf{V}(T_k)$.

□ **Exercice IV.58** (♥) Déterminer la loi de $X + Y$, pour deux variables aléatoires discrètes indépendantes X et Y telles que

1) $X \hookrightarrow \mathscr{B}(k, p)$ et $Y \hookrightarrow \mathscr{B}(\ell, p)$;
2) $X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$ et $Y \hookrightarrow \mathscr{P}(\mu)$;
3) $X \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$ et $Y \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$

□ **Exercice IV.59** Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires réelles. On note $M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ la matrice définie par

$$\forall (i, j) \in [\![1 ; n]\!]^2, \ M[i, j] = \operatorname{Cov}(X_i, X_j)$$

Montrer que $M \in S_n^+(\mathbf{R})$.

□ **Exercice IV.60** Soit $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé, et $(A_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite d'évènements. On note B l'ensemble des $\omega \in \Omega$ qui appartiennent à une infinité de A_n.

1) Montrer que l'ensemble B est un évènement.
2) On suppose que la série $\sum \mathbf{P}(A_n)$ converge. Montrer que $\mathbf{P}(B) = 0$.
3) On suppose que les événements $(A_n)_{n \in \mathbf{N}}$ sont *indépendants* et que la série $\sum \mathbf{P}(A_n)$ diverge. Montrer que $\mathbf{P}(B) = 1$.

□ **Exercice IV.61** Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbf{N}$. Savoir démontrer le résultat du cours

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}(X \geqslant n)$$

□ **Exercice IV.62** Soit N une variable aléatoire discrète à valeurs dans N et $(X_k)_{k\in\mathbf{N}^*}$ une suite de variables aléatoires discrètes réelles identiquement distribuées. On suppose les X_k mutuellement indépendants, et indépendantes de N. On pose $S = \sum_{k=1}^{N} X_k$.

1) Justifier que S est une variable aléatoire discrète.
2) Déterminer la loi de S dans le cas où $N \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$ et $X_1 \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$, avec $\lambda \in \mathbf{R}_+^*$ et $p \in]0,1[$.
3) Exprimer la fonction génératrice G_S à l'aide de G_N et G_{X_1} dans le cas où X_1 est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{N}$.
4) Si N et X_1 sont d'espérances finies, montrer que S aussi ; exprimer $\mathbf{E}(S)$ en fonction de $\mathbf{E}(N)$ et $\mathbf{E}(X_1)$.

□ **Exercice IV.63** (♥) Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes. On suppose que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,

$$\mathbf{P}(X_n = 1) = \mathbf{P}(X_n = -1) = \frac{1}{2}$$

On pose $S = X_1 + \cdots + X_n$.

1) Soit $t \in \mathbf{R}$, calculer $\mathbf{E}(e^{tS})$ et montrer que

$$\mathbf{E}(e^{tS}) \leqslant \exp\left(\frac{nt^2}{2}\right)$$

2) En déduire que pour $s \in \mathbf{R}+^*$, $\mathbf{P}(S \geqslant ns) \leqslant \exp\left(-\frac{s^2}{2n}\right)$.

V : Séries numériques

□ **Exercice V.64** (♥) Soit $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$. À quelle condition la série $\sum \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ converge-t-elle ?

□ **Exercice V.65** Soit $\alpha > 0$. Déterminer la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$.

□ **Exercice V.66** Pour tout $n \geqslant 1$, on pose $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

1) Montrer que $H_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$ puis qu'il existe $\gamma \in \mathbf{R}$ tel que

$$H_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$$

2) Montrer que les séries $\sum_{k\geqslant 1} \frac{(-1)^k}{k}$ et $\sum_{k\geqslant 1} \frac{\cos(2k\pi/3)}{k}$ convergent, et calculer leurs sommes.

□ **Exercice V.67** (♥) Donner des équivalent simples de $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$ $(\alpha < 1)$ et $\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ $(\alpha > 1)$

□ **Exercice V.68** Donner des équivalent simples de $\sum\limits_{k=0}^{n} k!$ et $\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!}$.

□ **Exercice V.69** Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle de limite $\ell \in \overline{\mathbf{R}}$.
Montrer que $\dfrac{1}{n+1} \sum\limits_{k=0}^{n} u_k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

□ **Exercice V.70** (Transformation d'Abel)
Soit $(a_k)_{k\in\mathbf{N}}$ et $(b_k)_{k\in\mathbf{N}}$ deux suites numériques. On pose pour tout $n \in \mathbf{N}$, $B_n = \sum\limits_{k=1}^{n} b_k$.

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,

$$\sum_{k=0}^{n} a_k b_k = a_n B_n + \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k-1}) B_k$$

2) On suppose que la suite $(a_k)_{k\geqslant 0}$ est une suite réelle décroissante de limite nulle, et que $(B_n)_{n\geqslant 0}$ est bornée. Démontrer que la série $\sum a_n b_n$ converge.
3) En déduire la convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{\sin n}{\sqrt{n}}$.

□ **Exercice V.71** Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite définie par $u_0 = \frac{\pi}{2}$ et $\forall\, n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = \sin(u_n)$.

1) Étudier la convergence de la suite u.
2) Déterminer un équivalent simple de la suite (u_n).

   On pourra chercher un réel α tel que $u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha$ admette une limite finie non nulle.

□ **Exercice V.72** (†) Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de réels positifs. On suppose que pour n, m dans $\mathbf{N}$,

$$u_{n+m} \leqslant u_n + u_m$$

1) Montrer que pour $p \geqslant 1$, $q \geqslant 1$ et $r \geqslant 0$, $u_{pq+r} \leqslant p u_q + u_r$.
2) En déduire que la suite $\left(\frac{u_n}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ converge.

Cet exercice ne nécessite pas de séries, il est là car il faut bien le mettre quelque part.

VI : Suites, séries de fonctions et intégration

□ **Exercice VI.73** Déterminer la nature des intégrales suivantes :

$$\int_0^1 \ln(t)\mathrm{d}t \qquad \int_1^{+\infty} \ln(t)\mathrm{d}t \qquad \int_0^{+\infty} \frac{t^5}{(t^4+1)\sqrt{t}}\mathrm{d}t$$

$$\int_0^{\pi} \ln(\sin(t))\mathrm{d}t \qquad \int_1^{+\infty} \frac{1}{t\sqrt{t^2+1}}\mathrm{d}t \qquad \int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+t^2)}{t^2}\mathrm{d}t$$

□ **Exercice VI.74** Après avoir justifié sa convergence, calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^3+1}$.

□ **Exercice VI.75** (♥) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ converge mais qu'elle ne converge pas absolument.

□ **Exercice VI.76** Donner des équivalent simples de $\displaystyle\int_0^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$

□ **Exercice VI.77** Déterminer les rayon de convergence des séries entières suivantes

$$\sum \frac{x^n}{\sqrt{n}} \qquad \sum \frac{n!}{(2n)!}x^n \qquad \sum \frac{n!}{2^{2n}\sqrt{(2n!)}}x^n$$

$$\sum \ln(n)x^n \qquad \sum (2+ni)z^n \qquad \sum \frac{\sqrt{n}}{2^{2n+1}+1}x^{2n}$$

□ **Exercice VI.78** Soit $\alpha \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{N}$. On pose f la fonction définie sur $]-1,1[$ par $f : x \mapsto (1+x)^{\alpha}$.

1) Déterminer une équation différentielle linéaire d'ordre 1 vérifiée par f.
2) En déduire que f est développable en série entière sur $]-1,1[$ et déterminer les coefficients de son développement.

□ **Exercice VI.79** (†) Soient $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ deux suites de réels. On suppose que $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est à termes positifs et que $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$.

On suppose de plus que le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ est 1, et que la série $\sum a_n$ diverge.

Montrer que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \underset{x\to 1^-}{\longrightarrow} +\infty$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \underset{x\to 1^-}{\sim} \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$

On pourra s'inspirer de la démonstration de la sommation des relations de comparaison

□ **Exercice VI.80** Pour $n \geqslant 1$ et$x \in \mathbf{R}$, on pose $u_n(x) = \frac{1}{n^2+x^2}$.

1) Montrer que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge normalement sur $\mathbf{R}$. En déduire que

$$S : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$$

   est définie et continue sur $\mathbf{R}$.
2) Montrer que S est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}$
3) Montrer que S admet une limite en $+\infty$ et la déterminer.

□ **Exercice VI.81**

1) Justifier la définition et la continuité sur $\mathbf{R}^+$ de la fonction $f : x \mapsto \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{xe^{-nx}}{n \ln n}$.
2) Donner la limite puis un équivalent de f en $+\infty$.
3) Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$. Est-elle dérivable en 0 ?

□ **Exercice VI.82** Montrer que $\int_0^1 e^t \ln t \, \mathrm{d}t = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n \cdot n!}$.

□ **Exercice VI.83** En justifiant sa convergence, calculer la somme $S = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^3)^n}$.

□ **Exercice VI.84** Montrer que $\int_{-\sqrt{n}}^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} \, \mathrm{d}t$.

□ **Exercice VI.85** (♥) On note $L^2(\mathbf{R})$ l'ensemble des fonctions f continues de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ telles que f^2 soit intégrable.

1) Soit f, g dans $L^2(\mathbf{R})$, montrer que la fonction fg est intégrable.
2) En déduire que $L^2(\mathbf{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^0(\mathbf{R})$.
3) Montrer que $(f, g) \mapsto \int_{\mathbf{R}} fg$ est un produit scalaire sur $L^2(\mathbf{R})$.

□ **Exercice VI.86**

1) Donner un exemple d'une fonction $f : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ qui est intégrable mais qui n'est pas bornée.
2) (†) Montrer que si $f : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ est uniformément continue et intégrable alors $\lim\limits_{+\infty} f = 0$.

□ **Exercice VI.87** Soit f une fonction continue de $\mathbf{R}_+$ dans $\mathbf{R}$ admettant une limite finie ℓ en $+\infty$. On pose

$$L_f : x \mapsto \int_0^{+\infty} f(t) e^{-xt} \mathrm{d}t$$

1) Justifier que L_f est définie et continue sur $\mathbf{R}_+^*$.
2) Montrer que $\lim\limits_{x\to0^+} xL_f(x) = \ell$. Que dire de $\lim\limits_{+\infty} L_f$?

□ **Exercice VI.88** On pose pour $x > 0$,

$$\Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} \mathrm{d}t$$

Montrer que Γ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}_+^*$. Déterminer $\lim\limits_{0^+} \Gamma$ et $\lim\limits_{+\infty} \Gamma$

□ **Exercice VI.89** Soit $x \in \mathbf{R}$ on pose (en cas de convergence)

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \text{ et } \eta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)n - 1}{n^x}$$

1) Montrer que ζ est définie et de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]1, +\infty[$.
2) Montrer que η est définie et de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$.
3) Donner une relation entre $\zeta(x)$ et $\eta(x)$ pour $x > 1$.

□ **Exercice VI.90** Soit $[a, b]$ un segment de $\mathbf{R}$ et $f \in \mathscr{C}^0([a, b], \mathbf{R})$. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(t) \sin(nt) \mathrm{d}t = 0$$

On pourra se contenter de le faire dans le cas où f est de classe $\mathscr{C}^1$.

□ **Exercice VI.91** Soit $\theta \in \mathbf{R}$. déterminer le développement en série entière en 0 de

$$f : x \longmapsto \frac{1}{x^2 - 2x\cos(\theta) + 1}$$

□ **Exercice VI.92** Soit $n \in \mathbf{N}$. On note a_n le nombre de couples $(a, b) \in \mathbf{N}^2$ tels que $a + 2b = n$.

1) Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n z^n$.
2) Montrer que pour $x \in]-R, R[$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \frac{1}{1-x} \times \frac{1}{1-x^2}$$

3) En déduire un expression de a_n.

□ **Exercice VI.93** Soit $\sum a_n z^n$ une série entière à coefficients complexes, de rayon de convergence $R > 0$. On note f sa somme.

1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$ et tout $r \in]0, R[$, $a_n = \dfrac{1}{2\pi r^n} \displaystyle\int_0^{2\pi} e^{-in\theta} f(re^{i\theta})\,\mathrm{d}\theta$.
2) En déduire que si $R = +\infty$ et que f est bornée sur $\mathbf{C}$ alors f est constante.

VII : Topologie

□ **Exercice VII.94** Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$. On note $\| \|_{\text{op},1}$ la norme subordonnée relativement à la norme 1 :

$$\|A\|_{\text{op},1} = \sup_{X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{C}) \setminus \{0\}} \frac{\|AX\|_1}{\|X\|_1}$$

1) Montrer que $\|A\|_{\text{op},1} = \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} \sum\limits_{i=1}^{n} |A[i,j]|$.
2) Calculer de même $\|A\|_{\text{op},\infty}$.

□ **Exercice VII.95** Montrer que si F est un sous-espace vectoriel strict de E alors $\mathring{F} = \varnothing$.

□ **Exercice VII.96** Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $A \subset E$ une partie non vide supposée fermée

Soit $x \in E$, montrer qu'il existe $a \in A$ tel que $d(x, A) = \|x - a\|$.

□ **Exercice VII.97** Soit E un espace vectoriel normé.

1) Soit F un sous-espace vectoriel de E. Montrer que son adhérence $\overline{F}$ est aussi un sous-espace vectoriel de E.
2) Soit H un hyperplan de E. Montrer qu'il est fermé ou dense.

□ **Exercice VII.98** (♥♥) Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ est un ouvert dense de $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$.

□ **Exercice VII.99** Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ est connexe par arcs. Qu'en est-il de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$?

□ **Exercice VII.100** Soit X un compact d'un espace vectoriel normé, et $f : X \to X$ contractante, c'est-à-dire k-lipschitizienne avec $k \in]0,1[$.

Pour $a \in X$, on considère la suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ définie par $u_0 = a$ et, pour tout $n \geqslant \mathbf{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. On pose $d = \|u_1 - u_0\|$.

1) Justifier que pour $n \in \mathbf{N}$, $\|u_{n+1} - u_n\| \leqslant k^n d$
2) En déduire que pour tout $n \in \mathbf{N}$ et tout $p \in \mathbf{N}$, $\|u_{n+p} - u_n\| \leqslant \frac{k^n}{1-k} d$
3) Montrer que $(u_n)_{n \geqslant 0}$ converge et que sa limite a vérifie que $f(a) = a$.

□ **Exercice VII.101** (†) Montrer que toute suite décroissante de compacts non vides est d'intersection non vide.

□ **Exercice VII.102** (†) Soit E un espace vectoriel normé.

1) Soit U, V deux ouverts denses, montrer que $U \cap V$ est un ouvert dense.
2) On suppose que E est de dimension finie. Soit $(u_n)_{n \geqslant 0}$ une famille d'ouverts denses. Montrer que $\bigcap\limits_{n \in \mathbf{N}} U_n$ est encore dense.

□ **Exercice VII.103** (†) Soit $(M_k)_{k \geqslant 0}$ une suite de matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$. On suppose que pour tout $k \in \mathbf{N}$, $\mathrm{rg}(M_k) = r$ et que $(M_k) \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} M$. Que dire de $\mathrm{rg}(M)$?

□ **Exercice VII.104** Justifier l'existence de l'exponentielle de matrice sur $\mathscr{M}_d(\mathbf{R})$.

□ **Exercice VII.105** (♥) Montrer que $O_n(\mathbf{R})$ est compact.

□ **Exercice VII.106** (♥) Soit $n \in \mathbf{N}^*$, on note $\mathrm{St}_n(\mathbf{R}) \subset \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ l'ensemble des matrices stochastiques c'est-à-dire les matrices M telles que :

— $\forall (i,j) \in [\![1 ; n]\!]^2, M[i,j] \geqslant 0$
— $\forall i \in [\![1 ; n]\!], \sum_{j=1}^{n} M[i,j] = 1$

Montrer que $\mathrm{St}_n(\mathbf{R})$ est compact, convexe et stable par produit.

□ **Exercice VII.107** Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Calculer $\exp(A), \exp(B)$ et $\exp(A+B)$.

□ **Exercice VII.108** Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$.

1) Calculer χ_A et π_A. La matrice A est-elle diagonalisable ?
2) Déterminer $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbf{R})$ telle que $P^{-1}AP = T$ où $T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
3) Calculer $\exp(T)$ et en déduire $\exp(A)$.

□ **Exercice VII.109** Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1) Calculer χ_A et π_A. En déduire que la matrice A est diagonalisable.
2) Déterminer une matrice diagonale Δ semblable à A.
3) Trouver un polynôme $Q \in \mathbf{C}_2[X]$ tel que $\exp(\Delta) = Q(\Delta)$ et en déduire $\exp(A)$ sous forme d'un polynôme en A.

□ **Exercice VII.110** Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$, calculer $\det(\exp(M))$.

□ **Exercice VII.111** Déterminer les matrices $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ telle que $\lim_{t \to +\infty} \exp(tA) = 0$.

VIII : Équations différentielles

□ Exercice VIII.112

1) Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbf{R},\mathbf{R})$ telle que $f'(x)+f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Démontrer que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
2) Soit $f \in \mathscr{C}^2(\mathbf{R},\mathbf{R})$ telle que $f''(x)+f'(x)+f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Démontrer que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

□ Exercice VIII.113

(♥) Résoudre les équations différentielles suivantes :

— $y''+y=\cos(x)$
— $y''+y'+y=e^x$

□ Exercice VIII.114

(†) (Lemme de Gronwall)

Soit $a \in \mathbf{R}_+$. Soit f, ψ des fonctions continues et positives telles que

$$\forall t \in \mathbf{R}_+, f(t) \leqslant a + \int_0^t \psi(u) f(u)\mathrm{d}u$$

Montrer que

$$\forall t \in \mathbf{R}_+,\ f(t) \leqslant a \exp\left(\int_0^t \psi(u)\mathrm{d}u\right)$$

□ Exercice VIII.115

Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$, calculer $\det(\exp(M))$.

□ Exercice VIII.116

Déterminer les matrices $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ telle que $\lim_{t\to+\infty} \exp(tA) = 0$.

□ Exercice VIII.117

Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$ et $A : I \to \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ une fonction continue. Soit $X_1,\dots,X_n$ des fonctions de I dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ vérifiant l'équation différentielle linéaire homogène

$$X'(t) = A(t)X(t) \tag{H}$$

Soit $t_0 \in I$. Montrer que $(X_1,\dots,X_n)$ est une base de $\mathscr{S}_H$ si et seulement si $(X_1(t_0),\dots,X_n(t_0))$ est une base de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})$.

□ Exercice VIII.118

Résoudre l'équation différentielle en commençant par chercher des solutions développables en série entière.

$$(1+t^2)y''(t) + 4ty'(t) + 2y(t) = 0 \tag{E}$$

IX : Calcul différentiel

□ **Exercice IX.119** Soit $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ une fonction continue. On suppose que $\lim\limits_{\|x\| \to +\infty} f(x) = +\infty$. Montrer qu'il existe $x_0 \in \mathbf{R}^n$ tel que pour tout $x \in \mathbf{R}^n$, $f(x_0) \leqslant f(x)$.

□ **Exercice IX.120** Soit E un espace euclidien.

1) Vérifier que $f_1 : x \mapsto \|x\|$ est différentiable sur $E \setminus \{0\}$ et déterminer sa différentielle. Est-elle différentiable sur E ?
2) Soit $u \in S(E)$. Vérifier que $f_2 : x \mapsto (u(x)|x)$ est différentiable sur E et déterminer sa différentielle.
3) Vérifier que $f_3 : x \mapsto \frac{1}{\|x\|^2}$ est différentiable sur $E \setminus \{0\}$ et déterminer sa différentielle.

□ **Exercice IX.121**

1) Soit $p \in \mathbf{N}$. Montrer que $A \mapsto A^p$ est différentiable sur $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ et déterminer sa différentielle.
2) Même question pour $A \mapsto \det(A)$.
3) Montrer que $A \mapsto A^{-1}$ est différentiable sur $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ et déterminer sa différentielle.

□ **Exercice IX.122** Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ de $\mathbf{R}^n$ sur $\mathbf{R}$. On suppose que

$$\forall x \in \mathbf{R}^n,\ \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \geqslant 0$$

Montrer que f atteint son minimum en 0

□ **Exercice IX.123** (†) Soit $X = \mathrm{SL}_n(\mathbf{R}) = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R}) \mid \det(M) = 1\}$. Déterminer $T_{I_n}X$.

On pourra penser à utiliser des exponentielles de matrices.

□ **Exercice IX.124** Soit $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$. On note $f_1, \dots, f_n$ ses applications coordonnées.

1) On suppose qu'il existe $g : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ telle que $\nabla g = f$. Justifier que

$$\forall (i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2,\ \frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \tag{E}$$

2) (†) Réciproquement, montrer que si (E) est vérifiée, il existe $g : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ telle que $\nabla g = f$.

□ **Exercice IX.125** (Extrema libres et liés)
Soit $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R},\ (x,y,z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz$.

1) Déterminer les extrema locaux et globaux de f sur $\mathbf{R}^3$.
2) Même chose sur la sphère unité de $\mathbf{R}^3$.

□ **Exercice IX.126** Résoudre sur $\mathbf{R}^2$ les équations différentielles aux dérivées partielles suivantes :

- $3\dfrac{\partial f}{\partial x} + 2\dfrac{\partial f}{\partial y} = xe^y$ on pourra poser $x = au + bv, y = cu + dv$.
- $y\dfrac{\partial f}{\partial x} - x\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$ on pourra passer en polaire
- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$
- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ on pourra poser $xu = x + ay, v = x + by$.

X : Fonctions de la variable réelle

□ **Exercice X.127** On note $f(x) = e^{-1/x}$ si $x > 0$, $f(x) = 0$ sinon. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$.

□ **Exercice X.128** Montrer que la fonction $x \mapsto \dfrac{x}{e^x - 1}$ admet un prolongement $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$.

□ **Exercice X.129** Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction $\mathscr{C}^\infty$. On considère $g : x \mapsto \dfrac{f(x) - f(0)}{x}$.

1) Montrer que pour $x \neq 0 : g(x) = \displaystyle\int_0^1 f'(xt)\mathrm{d}t$.
2) En déduire que g se prolonge en une fonction $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$.

□ **Exercice X.130** Donner une fonction continue et pas uniformément continue.

□ **Exercice X.131** (†) Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction continue et T-périodique. Montrer que f est bornée et qu'elle est uniformément continue.

□ **Exercice X.132** Montrer que pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\frac{2}{\pi}x \leqslant \sin(x) \leqslant x$.

□ **Exercice X.133** Soit $(a_1, \dots, a_n) \in (\mathbf{R}_+^*)^n$. Commparer

$$m_a = \frac{1}{n}(a_1 + \cdots + a_n),\ m_g = (a_1 \cdots a_n)^{1/n},\ m_q = \sqrt{\frac{1}{n}(a_1^2 + \cdots + a_n^2)}$$

□ **Exercice X.134** Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$.

1) Soit $n \in \mathbf{N}^*$, on suppose qu'il existe $a_1 < \ldots < a_n$ tels que $f(a_1) = \cdots = f(a_n) = 0$. Montrer qu'il existe $c \in \mathbf{R}$ tel que $f^{(n-1)}(c) = 0$.
2) En déduire que si $f(0) = f(1) = f(2) = 0$ alors,

$$\forall\, x \in [0,2]\ ,\ \exists\, \xi \in]0,2[\ ,\ f(x) = \frac{x(x-1)(x-2)}{6} f^{(3)}(\xi)$$

3) On note $Z = \{x \in \mathbf{R} \mid f(x) = 0\}$. Soit $x_0 \in Z$, on suppose que x_0 est adhérent à $Z \setminus \{x_0\}$ (c'est-à-dire que x_0 n'est pas isolé). Montrer que pour tout $k \in \mathbf{N}$, $f^{(k)}(x_0) = 0$.