Notations

Dans ce problème, N désigne un entier naturel non nul.
On identifie $\mathbf{R}^N$ à l'espace vectoriel des matrices colonnes réelles $\mathscr{M}_{N,1}(\mathbf{R})$. On note $\|\cdot\|$ la norme infinie sur $\mathbf{R}^N$. Si $X = (x_i)_{1\leqslant i\leqslant N} \in \mathbf{R}^N$,

$$\|X\| = \max_{1\leqslant i\leqslant N} |x_i|$$

On note $\|\cdot\|_{\text{op}}$ la norme d'opérateur sur $\mathscr{M}_N(\mathbf{R})$ associée à la norme $\|\cdot\|$ sur $\mathbf{R}^N$. On rappelle que pour $A \in \mathscr{M}_N(\mathbf{R})$

$$\|A\|_{\text{op}} = \sup_{X\in\mathbf{R}^N\setminus\{0\}} \frac{\|AX\|}{\|X\|}$$

On fixe dans toute la suite du sujet $p \in \mathscr{C}^0(\mathbf{R},\mathbf{R})$. Pour tout réel λ, on note $x_\lambda \in \mathscr{C}^2(\mathbf{R})$ l'unique solution de

$$(\mathrm{E}_\lambda) \qquad \begin{cases} x_\lambda''(t) - (p(t)-\lambda)x_\lambda(t) = 0 & \text{pour tout } t \in \mathbf{R}, \\ x_\lambda(0) = 0, \quad x_\lambda'(0) = 1. \end{cases}$$

1. Soient a, b, T trois réels strictement positifs.
   (a) On considère une fonction $f : [0,T] \to \mathbf{R}$ continue telle que

   $$\forall t \in [0,T], \quad f(t) \leqslant a + b\int_0^t f(s)\ \mathrm{d}s$$

   Montrer que pour tout $t \in [0,T]$, $f(t) \leqslant ae^{bt}$.
   On pourra étudier les variations de la fonction définie par $t \mapsto \varphi(t) = e^{-tb}\left(a + b\int_0^t f(s)\ ds\right)$.

   On considère une fonction $X : [-T,T] \to \mathscr{M}_{N,1}(\mathbf{R})$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que

   $$\forall t \in [-T,T], \quad \|X'(t)\| \leqslant a + b\|X(t)\|$$

   (b) Montrer que pour tout $t \in [0,T]$, $\|X(t)\| \leqslant \|X(0)\| + \displaystyle\int_0^t (a + b\|X(s)\|)\ \mathrm{d}s$.
   (c) En déduire que pour tout $t \in [-T,T]$, $\|X(t)\| \leqslant (\|X(0)\| + aT)e^{b|t|}$.
   On commencera par montrer la relation sur $[0,T]$.

On note $X_\lambda(t) = \begin{pmatrix} x_\lambda(t) \\ x_\lambda'(t) \end{pmatrix}$ et on définit l'application $\Phi : \begin{array}{c} \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2 \\ (\lambda, t) \mapsto X_\lambda(t) \end{array}$.

2. Montrer que X_λ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}$ et que pour tout $t \in \mathbf{R}$, $X_\lambda'(t) = A_\lambda(t)X_\lambda(t)$ où $A_\lambda(t)$ est une matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$ que l'on précisera.

Dans les question **3**, **4** et **5**, on se donne $R > 0$ et on note

$$c = \sup\left\{\|A_\lambda(t)\|_{\text{op}} \mid (t,\lambda) \in [-R,R]^2\right\}.$$

3. (a) Justifier que c est bien défini.

(b) Montrer que

$$\forall t \in [-R, R], \quad \|X_\lambda(t)\| \leqslant e^{c|t|}.$$

On pourra utiliser la question 1)

4. (a) Soit $(s, t, \lambda) \in [-R, R]^3$. Montrer que

$$\|X_\lambda(t) - X_\lambda(s)\| \leqslant c e^{cR} |t - s|.$$

(b) Soit $(t, \lambda, \mu) \in [-R, R]^3$. Montrer que

$$\|X_\lambda(t) - X_\mu(t)\| \leqslant R e^{2cR} |\lambda - \mu|.$$

(c) Conclure que Φ est continue sur $\mathbf{R}^2$.

5. On note $B_\lambda = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que pour tout $t \in \mathbf{R}$,

$$X_\lambda(t) = e^{tB_\lambda} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \int_0^t e^{(t-s)B_\lambda} \begin{pmatrix} 0 \\ p(s) x_\lambda(s) \end{pmatrix} \, \mathrm{d}s.$$

6. On suppose dans cette question que $\lambda > 0$.

(a) Montrer que

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad x_\lambda(t) = \frac{\sin(\sqrt{\lambda} t)}{\sqrt{\lambda}} + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^t \sin(\sqrt{\lambda}(t-s)) p(s) x_\lambda(s) ds.$$

(b) En déduire que si p est bornée

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad |x_\lambda(t)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{\lambda}} e^{\frac{\|p\|_\infty}{\sqrt{\lambda}} |t|}.$$