

Partie I - Exemples de sous-algèbres

1) $T_n(\mathbb{K})$ et $T_n^+(\mathbb{K})$ sont non vides car ils contiennent la matrice nulle.

Soient $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, $B = (b_{i,j}) \in T_n(\mathbb{K})$ (respectivement : $T_n^+(\mathbb{K})$) et $\lambda \in \mathbb{K}$.

Soit $C = (c_{i,j}) = \lambda A + B$ et $E = (e_{i,j}) = AB$.

Pour tous $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tels que $i > j$ (respectivement : $i \geq j$),

$$c_{i,j} = \lambda a_{i,j} + b_{i,j} = \lambda 0 + 0 = 0$$

donc $C \in T_n(\mathbb{K})$ (resp : $T_n^+(\mathbb{K})$).

Ainsi $T_n(\mathbb{K})$ et $T_n^+(\mathbb{K})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Pour tous $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tels que $i > j$ (respectivement : $i \geq j$),

$$e_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j} = \sum_{k=1}^n 0 = 0$$

car pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $k < i$ ou $k \geq i > j$ (respectivement : $k \leq i$ ou $k > i \geq j$) donc $a_{i,k} = 0$ ou $b_{k,i} = 0$. donc $E \in T_n(\mathbb{K})$ (resp : $T_n^+(\mathbb{K})$).

Ainsi $T_n(\mathbb{K})$ et $T_n^+(\mathbb{K})$ sont des sous-algèbres de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

2) a) $\mathcal{A}_F$ est non vide car il contient l'endomorphisme nul de E dans lui-même car $0_{\mathcal{L}(E)}(F) = \{0_E\} \subset F$.

Soient $u, v \in \mathcal{A}_F$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Soient $w = \lambda u + v$ et $x = u \circ v$.

Pour tout $f \in F$, $w(f) = \lambda u(f) + v(f) \in F$ car $u(f)$ et $v(f)$ appartiennent à F et car F est stable par combinaison linéaire. Ainsi $w \in \mathcal{A}_F$.

Pour tout $f \in F$, $x(f) = u(v(f)) \in F$ car $v(f) \in F$. Ainsi $x \in \mathcal{A}_F$.

Donc $\mathcal{A}_F$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$.

b) Soit $\mathcal{F}$ une base de F . Par le théorème de la base incomplète, on peut la compléter en une base $\mathcal{E}$ de E .

Un endomorphisme u de E appartient à $\mathcal{A}_F$ si et seulement si sa matrice dans la base $\mathcal{E}$ est de

la forme $\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0_{n-p,p} & C \end{array} \right)$ (où A est la matrice dans $\mathcal{F}$ de l'endomorphisme de F induit par u et

$B \in \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_{n-p,n-p}(\mathbb{K})$).

L'application de $\mathcal{A}_F$ vers $\mathcal{M}_p(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{n-p,n-p}(\mathbb{K})$ qui à tout u associe le triplet de matrices (A, B, C) dans les notations précédentes est bijective et linéaire donc

$$\begin{aligned} \dim(\mathcal{A}_F) &= \dim(\mathcal{M}_p(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{n-p,n-p}(\mathbb{K})) \\ &= \dim(\mathcal{M}_p(\mathbb{K})) + \dim(\mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{K})) + \dim(\mathcal{M}_{n-p,n-p}(\mathbb{K})) \\ &= p^2 + p(n-p) + (n-p)(n-p) = p^2 + n(n-p) = \boxed{p^2 + n^2 - np} \end{aligned}$$

c)

$$\forall p \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket \quad n^2 - pn + p^2 = \left(p - \frac{n}{2}\right)^2 + \frac{3n^2}{4}$$

est maximal quand $|p - \frac{n}{2}|$ est maximal, c'est-à-dire quand $p = 1$ ou $p = n-1$.

La valeur du maximum est donc $\boxed{n^2 - n + 1}$.

3) Soit $\Gamma(\mathbb{K})$ le sous-ensemble de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ constitué des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ où $(a, b) \in \mathbb{K}^2$.

a) Posons $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$\Gamma(\mathbb{K}) = \text{Vect}(I_2, B)$ donc $\Gamma(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.

De plus $B^2 = -I_2 \in \Gamma(\mathbb{K})$. On a également $I_2 I_2 = I_2 \in \Gamma(\mathbb{K})$ et $I_2 B = B I_2 = B \in \Gamma(\mathbb{K})$. On en déduit que tout produit de deux combinaisons linéaires de I_2 et B est combinaison linéaire de I_2 et B . Ainsi $\Gamma(\mathbb{K})$ est stable par multiplication.

Donc $\Gamma(\mathbb{K})$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.

b) B n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ car n'est pas la matrice vide mais n'a aucune valeur propre réelle car si λ est valeur propre, $0 = \det(B - \lambda I_2) = \lambda^2 + 1$, équation sans racine réelle.

Donc $\Gamma(\mathbb{R})$ n'est pas une sous-algèbre diagonalisable de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

c) B a deux valeurs propres distinctes i et $-i$ dans $\mathbb{C}$ et $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, donc B est diagonalisable. Il existe donc $P \in GL_2(\mathbb{C})$ telle que $B = P D P^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$.

Pour tous $a, b \in \mathbb{C}$, $a I_2 + b B = a P I_2 P^{-1} + b P D P^{-1} = P(a I_2 + b D) P^{-1}$ est diagonalisable car $a I_2 + b B$ est diagonale.

Donc $\Gamma(\mathbb{C})$ est une sous-algèbre diagonalisable de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

Partie II - Une sous-algèbre commutative de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

Dans cette partie, on suppose $n \geq 2$.

Pour tout $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$, on pose

$$J(a_0, \dots, a_{n-1}) = \begin{pmatrix} a_0 & a_{n-1} & \cdots & a_1 \\ a_1 & a_0 & \cdots & a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_0 \end{pmatrix}.$$

Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de la forme $J(a_0, \dots, a_{n-1})$ où $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$.

Soit $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ la matrice canoniquement associée à l'endomorphisme $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ défini par $\varphi : e_j \mapsto e_{j+1}$ si $j \in \{1, \dots, n-1\}$ et $\varphi(e_n) = e_1$, où $(e_1, \dots, e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

4) $J^k = \text{Mat}_{\text{can}}(\varphi^k)$ où can désigne la base canonique de $\mathbb{C}^n$.

Or pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\varphi^k(e_j) = e_r$ où r désigne l'unique entier de $\llbracket 1, n \rrbracket$ congru à $j + k$ modulo n ("division euclidienne avec offset").

Posant $J_k = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ on a (en notant $(e_1^*, \dots, e_n^*) = \text{can}^*$ la base duale de can :

$$b_{i,j} = e_i^*(\varphi^k(e_j)) = \begin{cases} 1 & \text{si } i \equiv j + k \text{ mod } n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Autrement dit, en notant r le reste de la division euclidienne de k par n , J^k a des zéros partout sauf sur la $r^{\text{ème}}$ parallèle au dessous de la diagonale et, si $r \neq 0$, sur la $(n-r)^{\text{ème}}$ parallèle au dessus de la diagonale, où il y a des 1.

5) $J(a_0, \dots, a_{n-1}) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k J^k$

6) Par la question précédente, $(I_n, J, J^2, \dots, J^{n-1})$ engendre $\mathcal{A}$, et elle est libre car pour tous complexes $a_0, \dots, a_{n-1}$ tels que $\sum_{k=0}^{n-1} a_k J^k = 0$, on a $J(a_0, \dots, a_{n-1}) = 0$ d'où (en considérant les coefficients de la première colonne) $a_0 = a_1 = \dots = a_{n-1} = 0$.

C'est donc une base de $\mathcal{A}$.

- 7) Par la question précédente $\mathcal{A} = \text{Vect}(I, J, \dots, J^{n-1})$ donc est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
De plus pour $A, B \in \mathcal{A}$, il existe $a_0, \dots, a_{n-1}, b_0, \dots, b_{n-1} \in \mathbb{C}$ tels que $A = J(a_0, \dots, a_{n-1})$ et $B = J(b_0, \dots, b_{n-1})$ et on a :

$$AB = \left(\sum_{p=0}^{n-1} a_p J^p \right) \left(\sum_{q=0}^{n-1} b_q J^q \right) = \sum_{0 \leq p, q \leq n-1} a_p b_q J^{p+q} \in \text{Vect}(I, J, \dots, J^{n-1})$$

car pour tout $k \in \mathbb{N}$, $J^k = J^r$ où r est le reste de la division euclidienne de k par n .

Donc $AB \in \mathcal{A}$. De plus, le calcul de BA donne le même résultat.

Ainsi $\boxed{\mathcal{A} \text{ est une sous-algèbre commutative de } \mathcal{M}_n(\mathbb{C})}$.

- 8) Les valeurs propres de J sont les solutions de l'équation :

$$0 = \det(J - \lambda I_n) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & -\lambda & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 1 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -\lambda \end{vmatrix}$$

Par développement selon la première ligne, ce déterminant est égal à

$$-\lambda \det(T_1) + (-1)^{1+n} \det(T_2)$$

où $T_1 = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & & \\ 1 & -\lambda & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \end{pmatrix}$ et $T_2 = \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 0 & \\ 0 & 1 & -\lambda & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$ sont respectivement triangulaire inférieure et

triangulaire supérieure donc ont des déterminants égaux aux produits de leurs coefficients diagonaux.

Donc

$$\det(J - \lambda I_n) = -\lambda(-\lambda)^{n-1} + (-1)^{1+n} \cdot 1^{n-1} = (-1)^n (\lambda^n - 1)$$

$\boxed{\text{Les valeurs propres de } J \text{ sont donc les racines } n^{\text{èmes}} \text{ de l'unité.}}$

Pour tout $\omega \in \mathbb{U}_n$, $E_\omega(J) = \ker(J - \omega I_n)$ est l'ensemble des $X = \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix}$ tels que

$$\begin{cases} x_{n-1} = \omega x_0 \\ x_0 = \omega x_1 \\ \vdots \\ x_{n-3} = \omega x_{n-2} \\ x_{n-2} = \omega x_{n-1} \end{cases}$$

ce qui équivaut à :

$$\begin{cases} x_1 = x_0 / \omega \\ x_2 = x_0 / \omega^2 \\ \vdots \\ x_{n-1} = x_0 / \omega^{n-1} \\ x_0 = x_0 / \omega^n \end{cases}$$

Comme $\omega^n = 1$, on a donc

$$\boxed{E_\omega(J) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1/\omega \\ 1/\omega^2 \\ \vdots \\ 1/\omega^{n-1} \end{pmatrix} \right)}$$

Les vecteurs propres associés à ω sont les vecteurs non nuls de $E_\omega(J)$.

Remarque : le calcul de déterminant réalisé précédemment n'est pas indispensable, car le raisonnement ci-dessus montre que si $\omega \in \mathbb{U}_n$ alors ω est valeur propre car $E_\omega(J)$ n'est pas réduit à $\{\text{colonne nulle}\}$ et que si $\omega \notin \mathbb{U}_n$ et si $X \in E_\omega(J)$ alors comme $\omega^n x_{n-1} = x_{n-1}$, on a $x_{n-1} = 0$ puis $x_{n-2} = \omega \cdot 0 = 0$, etc... donc ω n'est pas valeur propre.

variante : comme $\mathbb{U}_n$ est de cardinal n , J a au moins n valeurs propres distinctes, et comme elle en a au plus n , on a $Sp(J) = \mathbb{U}_n$.

Comme J a n valeurs propres distinctes, J est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

9) $\mathcal{A}$ est diagonalisable par le même raisonnement qu'à la question 3)c).

10) Soit $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$. et $Q = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$.

Notant $P = ((e^{\frac{2iq\pi}{n}})^p)_{0 \leq p, q \leq n-1}$ la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ à la base propre obtenue à la question 8, on a

$$J = PDP^{-1}$$

avec $D = \text{Diag}(1, e^{\frac{2i\pi}{n}}, \dots, e^{\frac{2i\pi(n-1)}{n}})$.

On en déduit que pour tout naturel k , $J^k = P \text{Diag}(1, e^{\frac{2ik\pi}{n}}, \dots, e^{\frac{2ik\pi(n-1)}{n}}) P^{-1}$ puis

$$J(a_0, \dots, a_{n-1}) = P\Delta P^{-1}$$

avec $\Delta = \text{Diag}(Q(1), Q(e^{\frac{2i\pi}{n}}), \dots, Q(e^{\frac{2i\pi(n-1)}{n}}))$.

Les valeurs propres de $J(a_0, \dots, a_{n-1})$ sont les solutions de

$$0 = \det(J(\dots) - \lambda I_n) = \det(P(\Delta - \lambda I_n)P^{-1}) = \det(\Delta - \lambda I_n) = \prod_{\omega \in \mathbb{U}_n} (Q(\omega) - \lambda)$$

Donc $Sp(J(\dots)) = \{Q(\omega), \omega \in \mathbb{U}_n\}$ (son cardinal n'est pas toujours n).

Partie III - Sous-algèbres strictes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension maximale

11) Le plus rapide est de constater que pour $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$,

$$\langle A, B \rangle = \text{tr}((\sum_j a_{ij} b_{kj})_{1 \leq i, k \leq n}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{ij}$$

donc $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}(\llbracket 1, n \rrbracket^2)$.

Sinon, on peut vérifier un à un les points de la définition d'un produit scalaire :

- symétrie : $\langle B, A \rangle = \text{tr}(B^T A) = \text{tr}((B^T A)^T) = \text{tr}(A^T B) = \langle A, B \rangle$

- linéarité à droite ($\langle \cdot, A \rangle \lambda B + C = \lambda \langle A, B \rangle + \langle A, C \rangle$) par bilinéarité du produit matriciel et linéarité de la trace

- positivité : $\langle A, A \rangle = \sum_{i,j} a_{ij}^2 \geq 0$

- caractère défini : si $\langle A, A \rangle = 0$ alors $A = 0$ car une somme de carrés de réels n'est nulle que si tous ses termes sont nuls.

12) Comme $\mathcal{A}$ est de dimension finie, $\mathcal{A}^\perp$ est supplémentaire de $\mathcal{A}$ donc

$$r = \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) - \dim \mathcal{A} = n^2 - d$$

13) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Comme $\mathcal{A}$ est de dimension finie, $\mathcal{A} = (\mathcal{A}^\perp)^\perp$.

On a donc

$$M \in \mathcal{A} \Leftrightarrow (\forall N \in \mathcal{A}^\perp \langle N, M \rangle = 0) \Leftrightarrow (\forall i \in \llbracket 1, r \rrbracket \langle A_i, M \rangle = 0)$$

La dernière assertion implique bien l'avant dernière car tout vecteur de $\mathcal{A}^\perp$ est combinaison linéaire des A_i et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bilinéaire.

14) Soient $N \in \mathcal{A}$ et $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$.

Pour tout $M \in \mathcal{A}$,

$$\langle N^T A_i, M \rangle = \text{tr}((N^T A_i)^T M) = \text{tr}(A_i^T N M) = \langle A_i, N M \rangle = 0$$

car $A_i \in \mathcal{A}^\perp$ et $N M \in \mathcal{A}$ car $\mathcal{A}$ est stable par produit matriciel.

Donc $N^T A_i \in \mathcal{A}^\perp$.

15) La transposition est un automorphisme de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, donc $\mathcal{A}^T$, en tant qu'image directe du sous-espace vectoriel $\mathcal{A}$ par l'application linéaire injective qu'est la transposition, est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de même dimension que $\mathcal{A}$ (car la transposition induit un isomorphisme d'espaces vectoriels de $\mathcal{A}$ vers $\mathcal{A}^T$).

De plus $\mathcal{A}^T$ est stable par produit matriciel : pour toutes matrices $A, B \in \mathcal{A}$, $A^T B^T = (B A)^T \in \mathcal{A}^T$ car $B A \in \mathcal{A}$.

Donc $\mathcal{A}^T$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

16) Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et soit $F = \text{Vect}(A_1 X, \dots, A_r X)$.

Soit $M \in \mathcal{A}^T$. Alors l'unique antécédent M^T de M par la transposition appartient à $\mathcal{A}$. Soit $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$.

Par la question 14), $(M^T)^T A_i \in \mathcal{A}^\perp$ donc $M A_i \in \mathcal{A}^\perp$. Donc il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}$ tels que $M A_i = \sum_{k=1}^r \lambda_k A_k$.

$$M(A_i X) = \sum_{k=1}^r \lambda_k A_k X \in F$$

Pour tout élément Y de F , comme Y est combinaison linéaire de $A_1 X, \dots, A_r X$ et comme F est stable par combinaison linéaire, $M Y \in F$.

Donc F est stable multiplication à gauche par M .

17) D'après les questions 2)b), et 2)c), l'ensemble $\mathcal{A}_F$ des endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension n qui stabilisent un même sous-espace vectoriel non trivial F est de dimension au plus $n^2 - n + 1$.

• Dans les notations précédentes, supposons qu'il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $F = \text{Vect}(A_1 X, \dots, A_r X)$ soit un sous-espace non trivial de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$.

Comme les éléments de $\mathcal{A}^T$ (identifiés à des éléments de $\mathcal{L}(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))$) stabilisent F , ils appartiennent à $\mathcal{A}_F$. On a donc $\mathcal{A}^T \subset \mathcal{A}_F$.

Ainsi

$$\dim \mathcal{A} = \dim \mathcal{A}^T \leq \dim \mathcal{A}_F \leq n^2 - n + 1$$

• Sinon, on a pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $F = \{0\}$ ou $F = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Comme $r \geq 1$ (car $\mathcal{A}$ est différente de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et comme A_1 n'est pas nulle (car $(A_1, \dots, A_r)$ est libre), il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que $A_1 X \neq 0$ et donc telle que $F \neq \{0\}$.

Pour un tel X , on a donc $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = F = \text{Vect}(A_1 X, \dots, A_r X)$ donc $r \geq n$ et par conséquent

$$d = n^2 - r \leq n^2 - n \leq n^2 - n + 1$$

Dans tous les cas, $d \leq n^2 - n + 1$

Enfin, par la partie I, il existe une sous-algèbre stricte de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension $n^2 - n + 1$: il suffit de considérer l'algèbre des matrices qui stabilisent une droite ou un hyperplan de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Donc $n^2 - n + 1$ est la dimension maximale des sous-algèbres strictes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.