

REMARQUES DU FUTUR :

- 5.b,c considérer plutôt $\mathbf{P}(X \leq k)$.
- 5.f débile car la suite monotone donc convergence ps si et seulement si convergence P
- Revoir les notations dans les 1,2,3 entre A,B,D. Il faut les nommer pour que ce soit toujours des inégalités \leq ou dans l'autre sens?

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé. Toutes les variables aléatoires seront définies sur cet espace. On considère une suite $(X_n)_{n \geq 0}$ de variables aléatoires discrètes réelles et X une variable aléatoire discrète réelle.

On note $C = \{\omega \in \Omega \mid (X_n(\omega)) \rightarrow X(\omega)\}$.

1) On pose, pour tout $\varepsilon > 0$, $B(\varepsilon) = \bigcup_{N \in \mathbb{N}} \left(\bigcap_{n \geq N} (|X_n - X| \leq \varepsilon) \right)$.

- a) Justifier, pour tout $\varepsilon > 0$, l'appartenance de $B(\varepsilon)$ à \mathcal{A} .
- b) Établir l'égalité : $C = \bigcap_{\varepsilon > 0} B(\varepsilon)$ et en déduire que $C \in \mathcal{A}$.

On pourra considérer les événements $B(\frac{1}{k})$ pour $k \in \mathbb{N}^*$.

On dit que la suite $(X_n)_{n \geq 0}$ converge *presque sûrement* vers X si $\mathbf{P}(C) = 1$. On note alors $(X_n) \xrightarrow{p.s.} X$.

- 2) On suppose que pour tout $\varepsilon > 0$, la série $\sum_{n \geq 0} \mathbf{P}(|X_n - X| > \varepsilon)$ converge. Montrer que dans ce cas, $(X_n) \xrightarrow{p.s.} X$.

On pourra commencer par exprimer \overline{C} en fonction des événements $A_n(\frac{1}{k})$ où, pour tous $n \geq 0$ et $k \geq 1$, $A_n(\frac{1}{k}) = (|X_n - X| > \frac{1}{k})$.

- 3) On pose pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $\varepsilon > 0$, $D_N(\varepsilon) = (\sup_{n \geq N} |X_n - X| > \varepsilon)$
- a) Justifier que pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $\varepsilon > 0$, $D_N(\varepsilon) \in \mathcal{A}$.
 - b) Montrer que $(X_n) \xrightarrow{p.s.} X$ si et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(D_N(\varepsilon)) = 0$$

On dit que la suite $(X_n)_{n \geq 0}$ converge *en probabilité* vers X et on note $(X_n) \xrightarrow{\mathbf{P}} X$ si pour tout $\varepsilon > 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(|X_n - X| > \varepsilon) = 0$.

- 4) Déduire de la question précédente que si $(X_n) \xrightarrow{p.s.} X$ alors $(X_n) \xrightarrow{\mathbf{P}} X$.
- 5) Soit $(\lambda_k)_{k \geq 0}$ une suite de réels strictement positifs. On suppose que la série $\sum_{k \geq 0} \lambda_k$ converge et on note Λ sa somme. On considère alors une suite $(Y_k)_{k \geq 0}$ de variables aléatoires indépendantes telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $Y_k \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_k)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $X_n = \sum_{k=0}^n Y_k$. On pose aussi $X : \Omega \rightarrow \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ définie par

$$X : \omega \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} Y_k(\omega)$$

a) Soit $n \in \mathbb{N}$, déterminer la loi de X_n .

On pourra procéder par récurrence.

b) Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que $(X > k)$ est un événement et que

$$\mathbf{P}(X > k) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(X_n > k)$$

c) En déduire que : $\mathbf{P}(X > k) = e^{-\Lambda} \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{\Lambda^i}{i!}$.

d) En déduire que X est une variable aléatoire discrète et préciser sa loi. En particulier on précisera $\mathbf{P}(X = +\infty)$.

e) Montrer que la suite (X_n) converge en probabilité vers X .

f) Montrer que la suite (X_n) converge presque sûrement vers X dans le cas où la série $\sum_{k \geq 0} k \lambda_k$ converge.