

Exercice I

1. Montrons que N est une norme

- Pour tout $f \in E$, $N(f) = \|f + 2f' + f''\|_\infty \geq 0$.
- Soit $f \in E$ telle que $N(f) = 0$. Comme $\|\cdot\|_\infty$ est une norme cela implique que $f + 2f' + f'' = 0$. On reconnaît une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants. Le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y + 2y' + y'' = 0 \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$

a une unique solution d'après le théorème de Cauchy linéaire. Comme de plus la fonction nulle $\tilde{0}$ vérifie ce problème de Cauchy, on obtient que $f = \tilde{0}$.

- Soit $f \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$N(\lambda f) = \|\lambda f + 2(\lambda f)' + (\lambda f)''\|_\infty = \|\lambda(f + 2f' + f'')\|_\infty = |\lambda|N(f)$$

- Soit f, g dans E ,

$$N(f + g) = \|f + 2f' + f'' + g + 2g' + g''\|_\infty \leq \|f + 2f' + f''\|_\infty + \|g + 2g' + g''\|_\infty = N(f) + N(g)$$

On a bien montré que N était une norme sur E .

2. Soit $f \in E$. On pose $g = f + 2f' + f''$. D'après le théorème de Cauchy linéaire, le problème de Cauchy

$$(PC) \begin{cases} y + 2y' + y'' = g \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$

admet une unique solution.

Posons

$$h : x \mapsto e^{-x} \int_0^x (x-t)e^t g(t) dt = e^{-x} \left(x \int_0^x e^t g(t) dt - \int_0^x t e^t g(t) dt \right)$$

On vérifie pour commencer que $h(0) = 0$. On a de plus

$$h' : x \mapsto -h(x) + e^{-x} \left(\int_0^x e^t g(t) dt + x e^x g(x) - x e^x g(x) \right) = -h(x) + e^{-x} \int_0^x e^t g(t) dt$$

On en déduit que $h'(0) = 0$. En redérivant,

$$h'' : x \mapsto -h'(x) - e^{-x} \int_0^x e^t g(t) dt + g(x)$$

Pour tout $x \in [0, 1]$,

$$h(x) + 2h'(x) + h''(x) = h(x) + h'(x) - e^{-x} \int_0^x e^t g(t) dt + g(x) = g(x)$$

On a donc montré que h vérifiait le problème de Cauchy (PC). Par unicité de la solution $f = h$.

3. Soit $f \in E$, on pose encore $g = f + 2f' + f''$ de sorte que $N(f) = \|g\|_\infty$. Pour $x \in [0, 1]$,

$$|f(x)| = \left| e^{-x} \int_0^x (x-t)e^t g(t) dt \right| \leq e^{-x} \int_0^x (x-t)e^x |g(t)| dt \leq \|g\|_\infty e^{-x} \int_0^x (x-t)e^t dt$$

Or

$$\int_0^x (x-t)e^t dt = [(x-t)e^t]_0^x + \int_0^x e^t dt = -x + e^x - 1$$

On en déduit que $|f(x)| \leq (-xe^{-x} + 1 - e^{-x})\|g\|_\infty$. On pose $\varphi : x \mapsto -xe^{-x} + 1 - e^{-x}$. Sa dérivée est $\varphi' : x \mapsto -e^{-x} + xe^{-x} + e^{-x} = xe^{-x} \geq 0$. La fonction φ est croissante, comme $\varphi(0) = 0$ et $\varphi(1) = 1 - 2e^{-1}$, on obtient que pour tout $x \in [0, 1]$, $0 \leq \varphi(x) \leq 1 - 2e^{-1}$. Finalement,

$$\|f\|_\infty \leq (1 - 2e^{-1})\|g\|_\infty = (1 - 2e^{-1})N(f)$$

De plus, si « on pose » $g = \tilde{1}$ la fonction constante égale à 1, c'est-à-dire que l'on considère l'unique solution f du problème de Cauchy

$$\begin{cases} f + 2f' + f'' = 1 \\ f(0) = f'(0) = 0 \end{cases}$$

En reprenant le calcul ci-dessus, on obtient que $f = \varphi$. On a alors

$$\|f\|_\infty = (1 - 2e^{-1}) = (1 - 2e^{-1})\|g\|_\infty = (1 - 2e^{-1})N(f)$$

La constante $a = 1 - 2e^{-1}$ est donc optimale.

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère cette fois g_n la fonction définie par

$$g_n : t \mapsto \begin{cases} 1 - nt & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La fonction g_n est continue, $\|g_n\|_\infty = 1$ et g_n est nulle en dehors de $[0, \frac{1}{n}]$.

On considère f_n l'unique fonction de E qui vérifie $f_n + 2f_n' + f_n'' = g_n$. La fonction f_n existe d'après le théorème de Cauchy linéaire. On a alors pour $x \in [0, 1]$,

$$|f_n(x)| = \left| e^{-x} \int_0^x (x-t)e^t g_n(t) dt \right| \leq 1 \int_0^{\frac{1}{n}} e^t dt = \frac{e}{n}$$

On en déduit que $\|f_n\|_\infty \leq \frac{e}{n}$ et donc

$$\frac{N(f_n)}{\|f_n\|_\infty} = \frac{\|g_n\|_\infty}{\|f_n\|_\infty} \geq \frac{n}{e} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

On ne peut donc pas trouver de constante $b \in \mathbb{R}_+$ telle que pour toute fonction f dans E , $N(f) \leq b\|f\|_\infty$.

Exercice II

1. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $z \in \mathbb{C}$ et $k \in \mathbb{N}$.

a) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $z \in \mathbb{C}$. Montrons pour commencer que $\text{Sp}(zA) = z\text{Sp}(A)$.

Soit $\mu \in z\text{Sp}(A)$, il existe λ une valeur propre de A et x un vecteur propre associé tels que $\mu = z\lambda$. On a $(zA)(x) = z(Ax) = (z\lambda)x$ donc $\mu = z\lambda \in \text{Sp}(zA)$. On a montré que $\boxed{z\text{Sp}(A) \subset \text{Sp}(zA)}$.

Montrons maintenant que $\text{Sp}(zA) \subset z\text{Sp}(A)$. Remarquons, que cela est vrai si $z = 0$ puisque $\text{Sp}(0A) = \text{Sp}(0_n) = \{0\} = 0\text{Sp}(A)$. Si on suppose que $z \neq 0$, soit $\mu \in \text{Sp}(zA)$, il existe x un vecteur propre associé tel que $(zA)(x) = \mu x$. Cela implique que $z(Ax) = \mu x$ et donc $(Ax) = \frac{\mu}{z}x$. Cela implique que $\frac{\mu}{z} \in \text{Sp}(A)$ et donc $\mu \in z\text{Sp}(A)$. Finalement $\boxed{\text{Sp}(zA) \subset z\text{Sp}(A)}$.

On a montré que $\text{Sp}(zA) = z\text{Sp}(A)$. En prenant les modules, on obtient que $\{|\lambda|, \lambda \in \text{Sp}(zA)\} = |z|\{|\lambda|, \lambda \in \text{Sp}(A)\}$ et donc $\boxed{\rho(zA) = |z|\rho(A)}$.

- b) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On sait que A est trigonalisable. Elle est semblable à une matrice T dont les éléments diagonaux $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont les valeurs propres (comptées avec multiplicités) de A et de T . Soit $k \in \mathbb{N}$, A^k est semblable à T^k . On en déduit que

$$\text{Sp}(A^k) = \text{Sp}(T^k) = \{\lambda^k, \lambda \in \text{Sp}(T)\} = \{\lambda^k, \lambda \in \text{Sp}(A)\}.$$

En prenant les modules puis le max, on obtient $\boxed{\rho(A^k) = \rho(A)^k}$.

- c) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Soit $\lambda \in \text{Sp}(A)$ telle que $|\lambda| = \rho(A)$ et x un vecteur propre (non nul) associé à la valeur propre λ . On a alors

$$\frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1} = \frac{\|\lambda x\|_1}{\|x\|_1} = |\lambda|.$$

On en déduit que $\boxed{\|A\| = \sup_{x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}} \frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1} \geq |\lambda| = \rho(A)}$

- d) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $k \in \mathbb{N}$. En utilisant les deux propriétés démontrées ci-dessus,

$$\rho(A)^k = \rho(A^k) \leq \|A^k\|.$$

2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note $a_{i,j}$ le coefficient de A d'indice de ligne i et d'indice de colonne j et on pose $K = \max_{1 \leq j \leq n} \left(\sum_{i=1}^n |a_{i,j}| \right)$. Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$. Le vecteur Ax est le vecteur $(y_1, \dots, y_n)$ où, pour tout i compris entre 1 et n , $y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j$.

$$\|Ax\|_1 = \sum_{i=1}^n |y_i| = \sum_{i=1}^n \left| \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \right| \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}| |x_j| \leq \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n |a_{ij}| \right) |x_j| \leq \sum_{j=1}^n K |x_j| \leq K \|x\|_1$$

On en déduit que $\boxed{\|A\| \leq K = \max_{1 \leq j \leq n} \left(\sum_{i=1}^n |a_{i,j}| \right)}$

Pour montrer finalement que $\|A\| = K$. Il suffit de trouver un vecteur x (non nul) tel que $\frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1} = K$ car cela impliquera que $\|A\| \geq K$.

Notons, j_0 un entier tel que $K = \sum_{i=1}^n |a_{i,j_0}|$ et considérons le vecteur $x = (x_1, \dots, x_n)$ où $x_{j_0} = 1$ et $x_j = 0$ pour $j \neq j_0$. Par les formules usuelles Ax est le vecteur $(a_{1,j_0}, \dots, a_{n,j_0})$ de sorte que $\|Ax\|_1 = \sum_{i=1}^n |a_{i,j_0}| = K$. Comme de plus $\|x\|_1 = 1$ on a bien $\frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1} = K$.

3. a) Comme P_b est diagonale, $P_b^{-1} = P_{b^{-1}} = \text{Diag}(1, b^{-1}, \dots, b^{-(n-1)})$.

On remarque alors que multiplier à gauche une matrice A par une matrice diagonale $\text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ revient à multiplier la ligne i de A par λ_i . De même, multiplier à droite une matrice A par la même matrice diagonale revient à multiplier la colonne j de A par λ_j .

De ce fait, pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, si on note $a'_{ij}(b)$ le coefficient ligne i et colonne j de $P_b^{-1}AP_b$, on a

$$a'_{ij}(b) = b^{-(i-1)} a_{ij} b^{j-1} = a_{ij} b^{j-i}.$$

On fait tendre b vers 0. Si $i = j$, $a'_{ij}(b) = a_{ij}$; si $i > j$ alors $a_{ij} = 0$ et donc $a'_{ij}(b) = 0$ et pour finir, si $j > i$ alors $\lim_{b \rightarrow 0} a'_{ij}(b) = 0$. Notons que cela signifie que $\lim_{b \rightarrow 0} P_b^{-1}AP_b = \text{Diag}(a_{11}, \dots, a_{nn})$.

b) D'après la question précédente, $\lim_{b \rightarrow 0} P_b^{-1} A P_b = \text{Diag}(a_{11}, \dots, a_{nn})$.

Cela implique que $\lim_{b \rightarrow 0} \|P_b^{-1} A P_b\| = \|\text{Diag}(a_{11}, \dots, a_{nn})\|$.

Or, en utilisant la question 2) on voit que $\|\text{Diag}(a_{11}, \dots, a_{nn})\| = \max(|a_{11}|, \dots, |a_{nn}|) < 1$.

On en déduit qu'il existe b_0 tel que

$$\|P_{b_0}^{-1} A P_{b_0}\| < 1$$

c) On pose $A' = P_{b_0}^{-1} A P_{b_0}$ où b_0 est défini ci-dessus. Comme $\|\cdot\|$ est une norme subordonnée, elle est sous-multiplicative (ce qui signifie que pour deux matrices M, M' , $\|MM'\| \leq \|M\| \cdot \|M'\|$). On en déduit par une récurrence immédiate que pour tout entier $k \geq 0$, $\|(A')^k\| \leq \|A'\|^k$. Comme $\|A'\| < 1$ d'après la question précédente, $\lim_{k \rightarrow \infty} \|(A')^k\| = 0$.

Maintenant, pour tout $k \geq 0$, $\|A^k\| = \|P_{b_0} (A')^k P_{b_0}^{-1}\| \leq \|P_{b_0}\| \times \|P_{b_0}^{-1}\| \times \|(A')^k\|$ par sous-multiplicativité. On en déduit que $\lim_{k \rightarrow \infty} \|A^k\| = 0$ ce qui signifie que la suite $(A^k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

La suite (A^k) converge vers 0 pour la norme $\|\cdot\|$ et donc pour toutes les normes car $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est un espace vectoriel de dimension finie.

4. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\rho(A) < 1$. On peut trigonaliser A , précisément, il existe une matrice inversible Q telle que $Q^{-1} A Q = T$ soit triangulaire supérieure. De plus, les coefficients diagonaux de T sont les valeurs propres (comptées avec multiplicités) de A . Ils sont donc tous de module strictement inférieur à 1. En utilisant la question 3) on en déduit que la suite $(T^k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ tend vers 0 et donc la suite $(A^k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ aussi puisque pour tout entier k non nul,

$$\|A^k\| = \|Q T^k Q^{-1}\| \leq \|Q\| \times \|Q^{-1}\| \times \|T^k\|.$$

5. Soit x un réel strictement supérieur à $\rho(A)$. D'après la question 1.a), $\rho\left(\frac{A}{x}\right) = \frac{\rho(A)}{x} < 1$. En utilisant la question précédente, on obtient que $\left(\left(\frac{A}{x}\right)^k\right)_{k \in \mathbb{N}^*}$ tend vers 0 et donc $x \in E_A$. Cela montre que

$$]\rho(A), +\infty[\subset E_A.$$

Soit $x \in]0, \rho(A)]$, on veut montrer que $x \notin E_A$ c'est-à-dire que la suite $\left(\left(\frac{A}{x}\right)^k\right)_{k \in \mathbb{N}^*}$ ne tend pas vers 0.

D'après la question 1.d), $\left\|\left(\frac{A}{x}\right)^k\right\| \geq \rho\left(\frac{A}{x}\right)^k = \left(\frac{\rho(A)}{x}\right)^k \geq 1$ car $\frac{\rho(A)}{x} \geq 1$. De ce fait, la suite $\left(\left(\frac{A}{x}\right)^k\right)_{k \in \mathbb{N}^*}$ ne tend pas vers 0.

On a bien montré que $E_A =]\rho(A), +\infty[$.

6. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $k \in \mathbb{N}^*$, on a vu que $\|A^k\| \geq \rho(A^k) = \rho(A)^k$ donc $\|A^k\|^{1/k} \geq (\rho(A)^k)^{1/k} = \rho(A)$.

Soit $\varepsilon > 0$, d'après la question précédente, $\rho(A) + \varepsilon \in E_A$ donc $\left(\left(\frac{A}{\rho(A) + \varepsilon}\right)^k\right)_{k \in \mathbb{N}^*}$ tend vers 0. Il

existe donc un rang N_ε tel que pour $k \geq N_\varepsilon$, $\left\|\left(\frac{A}{\rho(A) + \varepsilon}\right)^k\right\| \leq 1$. Cela implique $\|A^k\| \leq (\rho(A) + \varepsilon)^k$ puis $\|A^k\|^{1/k} \leq \rho(A) + \varepsilon$.

Finalement, cela montre que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier N_ε tel que pour $k \geq N_\varepsilon$, $\rho(A) \leq \|A^k\|^{1/k} \leq \rho(A) + \varepsilon$. C'est-à-dire $\lim_{k \rightarrow +\infty} \|A^k\|^{1/k} = \rho(A)$.