Devoir libre 9

Exercice I

Soit $E = \{f \in \mathscr{C}^2([0,1],\mathbb{R})\ ,\ f(0) = f'(0) = 0\}$.
Soit $f \in E$, on pose $N(f) = \|f + 2f' + f''\|_\infty$.

1) Montrer que N est une norme sur l'espace vectoriel E.
2) Soit $f \in E$. On pose $g = f + 2f' + f''$. Montrer que pour tout $x \in [0,1]$,

$$f(x) = e^{-x}\int_0^x (x-t)e^t g(t)dt$$

3) Montrer qu'il existe une constante $a \in \mathbb{R}_+$ telle que

$$\forall f \in E, \|f\|_\infty \leqslant aN(f)$$

Déterminer la constante a optimale.

4) Peut-on trouver $b \in \mathbb{R}_+$ telle que

$$\forall f \in E, N(f) \leqslant b\|f\|_\infty\ ?$$

Exercice II

Soit n un nombre entier naturel supérieur ou égal à 2
Le module d'un nombre complexe z est noté $|z|$.

L'espace vectoriel $\mathbb{C}^n$ est identifié à l'espace $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ des matrices colonnes à n lignes et à coefficients dans $\mathbb{C}$.
Les coefficients d'un vecteur $x \in \mathbb{C}^n$ sont notés $x_1,\dots,x_n$. Dans tout le problème, $\mathbb{C}^n$ est muni de la norme $\|\cdot\|_1$ définie par

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|.$$

Pour tous $x \in \mathbb{C}^n$ et $y \in \mathbb{C}^n$, la matrice $x^\top y \in \mathscr{M}_1(\mathbb{C})$ est identifiée au nombre complexe $\displaystyle\sum_{i=1}^n x_i y_i$.

Soit $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$, on notera $\operatorname{Diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ la matrice diagonale

$$\operatorname{Diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$$

Pour $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, on notera $\|M\|$ la norme subordonnée (pour la norme $\|\cdot\|_1$) de l'application linéaire $x \mapsto Mx$ canoniquement associée à M. On a donc

$$\|M\| = \sup_{x\in\mathbb{C}^n,\ \|x\|_1=1} \|Mx\|_1 = \sup_{x\in\mathbb{C}^n\setminus\{0\}} \frac{\|Mx\|_1}{\|x\|_1}$$

Le rayon spectral de M, noté $\rho(M)$, est défini comme le maximum des modules des valeurs propres de la matrice M :

$$\rho(M) = \max\{|\lambda|\ ,\ \lambda \in \operatorname{Sp}(M)\}$$

1) Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, $z \in \mathbb{C}$ et $k \in \mathbb{N}$. Etablir les relations suivantes :

a) $\rho(zA) = |z|\rho(A)$

b) $\rho(A^k) = \rho(A)^k$

c) $\rho(A) \leqslant \|A\|$

d) $\rho(A)^k \leqslant \|A^k\|$

2) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. On note $a_{i,j}$ le coefficient de A d'indice de ligne i et d'indice de colonne j. Montrer que

$$\|A\| = \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \left(\sum_{i=1}^{n} |a_{i,j}| \right).$$

3) On considère dans cette question une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire supérieure,

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \cdots & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

On suppose que

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad |a_{i,i}| < 1.$$

Pour tout réel $b > 0$, on pose $P_b = \mathrm{Diag}(1, b, b^2, \ldots, b^{n-1}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

a) Calculer $P_b^{-1} A P_b$. Que se passe-t-il lorsqu'on fait tendre b vers 0 ?

b) Montrer qu'il existe $b > 0$ tel que

$$\|P_b^{-1} A P_b\| < 1.$$

c) En déduire que la suite $(A^k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

Dans les questions 4 à 6, on considère une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

4) Montrer que si $\rho(A) < 1$, alors la suite $(A^k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

5) On définit la partie de $\mathbb{R}_+$

$$E_A = \left\{ \alpha > 0 \mid \lim_{k \to +\infty} \left(\frac{A}{\alpha} \right)^k = 0 \right\}.$$

Montrer que $E_A =]\rho(A), +\infty[$.

6) Montrer la formule

$$\lim_{k \to +\infty} \|A^k\|^{1/k} = \rho(A).$$