Exercice 1

1. Pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\beta(y,x) = \beta(x,y)$ de manière immédiate.
   Remarquons que pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$ on a :

$$\begin{aligned}
\beta(x,y) &= \frac{1}{2}(-(x_0+y_0)^2 + \sum_{i=1}^{n-1}(x_i+y_i)^2 + x_0^2 - \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 + y_0^2 - \sum_{i=1}^{n-1} y_i^2) \\
&= -x_0y_0 + \sum_{i=1}^{n-1} x_iy_i \\
&= \boxed{X^\top JY}
\end{aligned}$$

   où $X = \mathrm{mat}_{\mathrm{can}}(x) = \begin{pmatrix} x_0 \\ \dots \\ x_{n-1} \end{pmatrix}$ et *idem mut. mut.* pour Y.
   Par bilinéarité du produit matriciel et linéarité de $x \mapsto mat_{can}(x)$, on en déduit la bilinéarité de β.
   Cela montre que β est une $\boxed{\text{forme bilinéaire symétrique.}}$
   Par contre, β $\boxed{\text{n'est pas}}$ un produit scalaire. car pour $x = (1, 0, \dots, 0)$ on a $\beta(x,x) = q(x) = -1 < 0$.
   Remarquons de plus que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ on a $q(x) = \beta(x,x) = X^\top JX$ car $\beta(x,x) = (4q(x) - q(x) - q(x))/2$.

2. G est non vide car il contient $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$.
   Soient $f, g \in G$. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad q((f^{-1} \circ g)(x)) = q(f^{-1}(g(x))) = q(f(f^{-1}(g(x)))) = q(g(x)) = q(x)$$

   donc $f^{-1} \circ g \in G$.
   Ainsi $\boxed{G \text{ est un sous-groupe de } \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})}$.

3. Pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$, notant $X = \mathrm{mat}_{\mathrm{can}}(x)$ et $Y = \mathrm{mat}_{\mathrm{can}}(y)$ on a :

$$\beta(x,y) = X^\top JY \quad \text{et} \quad \beta(f(x), f(y))) = X^\top A^\top JAY$$

   Donc $\boxed{\text{si } A^\top JA = J \text{ alors } f \in G}$.
   Réciproquement, si $f \in G$ alors pour tous x, y on a

$$\begin{aligned}
\beta(f(x), f(y)) &= (q(f(x) + f(y)) - q(f(x)) - q(f(y)))/2 \\
&= (q(f(x+y)) - q(f(x)) - q(f(y)))/2 \\
&= (q(x+y) - q(x) - q(y))/2 \\
&= \beta(x,y)
\end{aligned}$$

   Pour $0 \leqslant i, j \leqslant n-1$ on obtient pour $x = e_i$ et $y = e_j$, en posant $E_i = \mathrm{mat}_{\mathrm{can}}(e_i)$,

$$E_i^\top(A^\top JA - J)E_j = 0$$

   c'est-à-dire $(A^\top JA - J)[i,j] = 0$
   Ceci valant pour tous i, j on a $A^\top JA - J = 0$ c'est-à-dire $A^\top JA = J$.

4. Dans les notations précédentes, si $f \in G$ on a $\det(J) = \det(A^\top JA) = \det(A^\top)\det(J)\det(A) = \det(J)\det(A)^2$ et comme $\det J = -1 \neq 0$ on a
$$\det(A)^2 = 1$$
c'est-à-dire
$$\boxed{\det(A) \in \{-1, 1\}}$$
5. Soit $K = \{f \in G \mid f(e_0) = e_0\}$ ou e_0 est le premier vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
   a) On voit que K n'est pas vide car il contient $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$. De plus, pour tous $f, g \in K$ on a
   $$e_0 = f^{-1}(f(e_0)) = f^{-1}(e_0) = f^{-1}(g(e_0))$$
   donc $f^{-1} \circ g \in K$.
   Ainsi $\boxed{K \text{ est un sous-groupe de } G}$.
   b) Remarquons que $H = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_{n-1})$.
   Soit $f \in K$. La matrice A de f dans la base canonique est alors de la forme
   $$A = \left(\begin{array}{c|c} 1 & L \\ \hline 0 & B \end{array}\right)$$
   et comme
   $$J = A^\top JA = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline L^\top & B^\top \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} -1 & -L \\ \hline 0 & B \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} -1 & -L \\ \hline -L^\top & -L^\top L + B^\top B \end{array}\right)$$
   on en déduit que $L = 0$ puis $B^\top B = I_{n-1}$ c'est-à-dire $B \in O(n-1)$.
   On a alors pour tout $x \in H$, notant $X = \mathrm{mat}_{\mathrm{can}}(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ Y \end{pmatrix}$, $AX = \begin{pmatrix} 0 \\ BY \end{pmatrix}$ donc $f(x) \in H$.
   Donc $\boxed{H \text{ est stable par } f \text{ pour tout } f \in K}$.
   c) En remontant le raisonnement précédent on obtient que si réciproquement $B \in O(n-1)$ alors l'endomorphisme f canoniquement associé à $A = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right)$ appartient à K.
   On en déduit que $\boxed{K \text{ est isomorphe à } O_{n-1}(\mathbb{R})}$ via l'application φ qui à tout $B \in O(n-1)$ associe l'endomorphisme canoniquement associé à $\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right)$
   car pour tous $B, B' \in O(n-1)$ on a $\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & B' \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & BB' \end{array}\right)$ donc $\varphi(BB') = (\varphi(B)) \circ (\varphi(B'))$.
6. On pose $\mathscr{H} = \{(t, X) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1} \,|\, q(t, X) = -1\}$.
   Par définition, $\mathscr{H}$ est stable par tous les éléments de G.
   a) Soit $(t, X) \in \mathscr{H}$. Soit $f \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. On note $A = \left(\begin{array}{c|c} a & L \\ \hline C & B \end{array}\right)$ sa matrice dans la base canonique.
   On a $f(e_0) = (t, X) \Leftrightarrow \boxed{(a, C) = (t, X)}$. Supposant cette condition vérifiée on a
   $$\begin{aligned} f \in G \quad &\Leftrightarrow \quad A^\top JA = J && (1) \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} t & X^\top \\ L^\top & B^\top \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & I_{n-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t & L \\ X & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & I_{n-1} \end{pmatrix} && (2) \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} -t^2 + X^\top X & -tL + X^\top B \\ -tL^\top + B^\top X & -L^\top L + B^\top B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & I_{n-1} \end{pmatrix} && (3) \\ &\Leftrightarrow \quad \boxed{\left\{\begin{array}{rcl} t^2 &=& 1 + \|X\|^2 \\ L &=& \frac{X^\top B}{t} \\ B^\top(-\frac{XX^\top}{t^2} + I_{n-1})B &=& I_{n-1} \end{array}\right.} && (4) \end{aligned}$$

b) Supposons que $X = r(1,0,\dots,0)^\top$ avec $r \geqslant 0$. Le système précédent s'écrit alors

$$\left\{\begin{array}{rcl} t^2 & = & 1+r^2 \\ L & = & r\,\frac{\text{première ligne de B}}{t} \\ B^\top \begin{pmatrix} 1/t^2 & 0 \\ 0 & I_{n-2} \end{pmatrix} B & = & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & I_{n-2} \end{pmatrix} \end{array}\right.$$

et une solution est donnée par :

$$B = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & I_{n-2} \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} t & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad t = \sqrt{1+r^2}$$

c) Soit $(t,X) \in \mathscr{H}$ (quelconque).
Si X n'est pas nulle, il suffit de compléter $(\frac{X}{\|X\|})$ (qui est orthonormale) en une base orthonormale de $\mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{R})$ et d'appeler P_X la matrice de passage de la base canonique à cette base.
Si X est nulle, toute matrice orthogonale convient.
Posons $r = \|X\|$.
D'après la question précédente, il existe une solution $f_0 \in G$ de l'équation $f_0(e_0) = (t, X_0)$, où $X_0 = \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ car $\|X_0\| = \|X\|$ donc $(t, X_0) \in \mathscr{H}$.
Notons $\begin{pmatrix} t & L_0 \\ X_0 & B_0 \end{pmatrix}$ la matrice de f_0 dans la base canonique.
Pour avoir

$$I_{n-1} = B^\top \left(-\frac{XX^\top}{t^2} + I_{n-1} \right) B = B^\top \left(-\frac{P_X X_0 X_0^\top P_X^\top}{t^2} + I_{n-1} \right) B$$

il suffit de poser $B = P_X B_0$ car $P_X^\top P_X = I_{n-1}$.
Ainsi l'endomorphisme canoniquement associé à

$$\begin{pmatrix} t & L_0 \\ X & P_X B_0 \end{pmatrix}$$

est une solution dans G de l'équation $f(e_0) = (t, X)$.

d) Soient $f, f' \in G$.
On a : $f'(e_0) = f(e_0) \Leftrightarrow \exists k \in K,\ (f^{-1} \circ f')(e_0) = e_0 \Leftrightarrow f^{-1} \circ f' \in K$

e) L'application $\mathscr{H} \ni (t,X) \mapsto (\varepsilon(t), X)$ avec $\varepsilon(t) = \left\{\begin{array}{ll} +1 & \text{si } t > 0 \\ -1 & \text{si } t < 0 \end{array}\right.$ est une bijection entre $\mathscr{H}$ et $\{-1,1\} \times \mathbb{R}^{n-1}$ de réciproque $(\pm 1, X) \mapsto (\pm\sqrt{1+\|X\|^2}, X)$.
On en déduit que l'application

$$(\pm 1, X, Q) \mapsto \begin{pmatrix} t & L_0 \\ X & P_X B_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t & L_0 Q \\ X & P_X B_0 Q \end{pmatrix}$$

avec $t = \pm\sqrt{1+\|X\|^2}$, $L_0 = \big(\|X\|, 0, \dots, 0\big)$ et $B_0 = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & I_{n-2} \end{pmatrix}$ est une bijection de $\{-1,1\} \times \mathbb{R}^{n-1} \times O_{n-1}(\mathbb{R})$ vers G.
(en identifiant $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ à $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$)

Exercice 2

1. Par définition, $I_n(\Omega) \in \mathbb{N}^*$. De plus pour $k \in \mathbb{N}^*$, pour tout $\omega \in \Omega$,
$$I_n(\omega) = k \iff (\forall i \in [\![1,n]\!], X_i(\omega) \geqslant k) \text{ et } (\exists i \in [\![1,n]\!], X_i(\omega) = k)$$
On en déduit que
$$(I_n = k) = \left(\bigcap_{i=1}^{n} (X_i \geqslant k)\right) \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} (X_i = k)\right)$$
Comme pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, X_i est une variable aléatoire, $(I_n = k)$ est une intersection (finie) d'éléments de $\mathscr{A}$. C'est donc une un élément de $\mathscr{A}$.
On a bien montré que I_n est une variable aléatoire discrète.
2. Soit $k \in \mathbb{N}$,
$$\mathbf{P}(X_1 > k) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{i=k+1}^{\infty} (X_1 = i)\right) = \sum_{i=k+1}^{\infty} \mathbf{P}(X_1 = i) = \sum_{i=k+1}^{\infty} pq^{i-1} = p\frac{q^k}{1-q} = q^k$$
On peut aussi utiliser le fait que X_1 suit la même loi que le temps d'attente du premier succès dans un schéma de Bernoulli de paramètre p et qu'ainsi $P(X_1 > k)$ est égale à la probabilité de commencer par k échecs dans un tel schéma.
3. Soit k un entier naturel, on voit que $(I_n > k) = \bigcap_{i=1}^{n} (X_i > k)$.
En utilisant l'indépendance des variables X_i et la question précédente,
$$\mathbf{P}(I_n > k) \overset{\perp\!\!\!\perp}{=} \prod_{i=1}^{n} \mathbf{P}(X_i > k) = \prod_{i=1}^{n} q^k = (q^n)^k$$
On en déduit que pour $k \geqslant 1$,
$$\mathbf{P}(I_n = k) = \mathbf{P}(I_n > k-1) - \mathbf{P}(I_n > k) = (q^n)^{k-2} - (q^n)^{k-1} = (1-q^n)(q^n)^{k-1}$$
On en déduit que I_n suit la loi géométrique de paramètre $1 - q^n$.
4. D'après ce qui précède,
$$\mathbf{E}(I_n) = \frac{1}{1-q^n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$$
Pour
$$\mathbf{P}(I_n = k) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} 1 & \text{si } k = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
5. a) Soit $\omega \in \Omega$, la suite $(I_n(\omega))$ est une suite décroissante minorée. Elle converge.
   b) La suite $(I_n(\omega))_{n\geqslant 1}$ est une suite décroissante d'entiers naturels. Elle est donc stationnaire. On en déduit que
$$\ell(\omega) = 1 \iff \exists n \in \mathbb{N}^*, I_n(\omega) = 1$$
   Cela prouve que $\mathscr{L} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} (I_n = 1)$.
   De plus, on voit que la suite $((I_n = 1))_{n\geqslant 1}$ est une suite croissante d'éléments donc
$$\mathbf{P}(\mathscr{L}) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} (I_n = 1)\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}(I_n = 1) = 1$$

6. a) Par hypothèse, $X_1 \leqslant M_n \leqslant X_1 + \cdots + X_n$. Par linéarité de l'espérance,

$$\frac{1}{p} = \mathbf{E}(X_1) \leqslant \mathbf{E}(M_n) \leqslant \mathbf{E}\left(X_1 + \cdots + X_n\right) = \frac{n}{p}$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout entier naturel k, $(M_n \leqslant k) = \bigcap_{i=1}^{n} (X_i \leqslant k)$.

Par indépendance des variables aléatoires X_i,

$$\mathbf{P}(M_n \leqslant k) = \prod_{i=1}^{n} \mathbf{P}(X_i \leqslant k) = (1 - q^k)^n$$

c) Soit $K \in \mathbb{N}^*$ et $n \geqslant 1$. On voit que $M_n \geqslant M_n \mathbf{1}_{(M_n \leqslant K)} + K \mathbf{1}_{(M_n > K)}$.
En effet pour $\omega \in \Omega$,
— Si $M_n(\omega) \leqslant K$, on a $M_n(\omega) \geqslant M_n(\omega) + 0$
— Si $M_n(\omega) > K$, on a $M_n(\omega) \geqslant 0 + K$
Par croissance et linéarité de l'espérance

$$\mathbf{E}(M_n) \geqslant \mathbf{E}(M_n\, \mathbf{1}_{(M_n \leqslant K)}) + K \mathbf{E}(\mathbf{1}_{(M_n > K)}) = \mathbf{E}(M_n\, \mathbf{1}_{(M_n \leqslant K)}) + K\, \mathbf{P}(M_n > K)$$

d) Soit $K \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbf{P}(M_n > K) = 1 - \mathbf{P}(M_n \leqslant K) = 1 - (1 - q^K)^n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 1$$

Il existe donc $N \in \mathbb{N}^*$ tel que pour $n \geqslant N$, $\mathbf{P}(M_n > K) \geqslant \frac{1}{2}$ et donc, en utilisant ce qui précède $\mathbf{E}(M_n) \geqslant \frac{K}{2}$. Cela montre que $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbf{E}(M_n) = +\infty$.

7. a) Comme M_n est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, en utilisant 6.b)

$$\mathbf{E}(M_n) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}(M_n > k) = \sum_{k=0}^{\infty} 1 - \mathbf{P}(M_n \leqslant k) = \sum_{k=0}^{\infty} \big(1 - (1 - q^k)^n\big)$$

b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$,

$$1 - (1 - q^k)^n = 1 - \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^i q^{ki} = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} (-1)^{i-1} q^{ki}$$

Par linéarité,

$$\mathbf{E}(M_n) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \binom{n}{i} \sum_{k=0}^{\infty} q^{ki} = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} (-1)^{i-1} \frac{1}{1 - q^i}$$

c) Notons f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f : t \mapsto 1 - (1 - q^{\lfloor t \rfloor})^n$. Par définition de la partie entière, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la fonction f est continue sur $[k, k+1[$. En effet elle est constante à $1 - (1 - q^k)^n$ sur cet intervalle.
La fonction f est donc continue par morceaux. Par la relation de Chasles,

$$\int_0^{+\infty} f(t) \mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{\infty} \int_k^{k+1} (1 - (1 - q^k)^n) \mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{\infty} (1 - (1 - q^k)^n) = \mathbf{E}(M_n)$$

8. a) Soit $k \in \mathbb{N}$. On pose $g_k : t \mapsto q^\top (1 - q^\top)^k$. La fonction est continue sur $[0, +\infty[$. De plus $|g_k(t)| \leqslant q^\top = \exp(\ln(q) t))$. Comme $\ln(q) < 0$, la fonction $t \mapsto \exp(\ln(q) t)$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ et donc g_k aussi.
De plus,

$$\int_0^{+\infty} q^\top (1 - q^\top)^k \mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{(k+1) \ln q} (1 - q^\top)^{k+1} \right]_0^{+\infty} = -\frac{1}{(k+1) \ln q}$$

b) Soit $n \geqslant 1$. Pour tout $t \in [0, +\infty[$,

$$\sum_{k=0}^{n-1} q^\top (1-q^\top)^k = q^\top \frac{1-(1-q^\top)^n}{1-(1-q^\top)} = 1-(1-q^\top)^n$$

En intégrant,

$$\int_0^{+\infty} \left(1-(1-q^\top)^n\right) \mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^{+\infty} q^\top (1-q^\top)^k \mathrm{d}t = -\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(k+1)\ln q} = -\frac{H_n}{\ln q}$$

c) Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $t \geqslant \lfloor t \rfloor$ donc $1-(1-q^{\lfloor t \rfloor})^n \geqslant 1-(1-q^t)^n$. En intégrant

$$\mathbf{E}(M_n) = \int_0^{+\infty} 1-(1-q^{\lfloor t \rfloor})^n \mathrm{d}t \geqslant \int_0^{+\infty} 1-(1-q^t)^n \mathrm{d}t = -\frac{H_n}{\ln q}$$

D'autre part

$$\int_0^{+\infty} 1-(1-q^{\lfloor t \rfloor})^n \mathrm{d}t = \int_0^1 1 \mathrm{d}t + \int_1^{+\infty} 1-(1-q^{\lfloor t \rfloor})^n \mathrm{d}t = 1 + \int_0^{+\infty} 1-(1-q^{\lfloor t+1 \rfloor})^n \mathrm{d}t$$

En utilisant cette fois que $t \leqslant \lfloor t+1 \rfloor$ on obtient que $\mathbf{E}(M_n) \geqslant 1 - \frac{H_n}{\ln q}$.
On sait que

$$\ln(k) - \ln(k-1) = \ln\left(1 + \frac{1}{k-1}\right) \sim \frac{1}{k-1} \sim \frac{1}{k}$$

Comme la série $\sum \frac{1}{k}$ diverge et que $\frac{1}{k} \geqslant 0$, par sommation des équivalents pour les séries divergentes,

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \sim \sum_{k=2}^{n} \ln(k) - \ln(k-1) = \ln(n)$$

On en déduit que $\mathbf{E}(M_n) \sim -\frac{\ln n}{\ln q}$ quand l'entier n tend vers $+\infty$.