

Exercice I

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel normé. On note $\|\cdot\|$ sa norme. On considère une partie H de E .

On dit que $x \in E$ est une combinaison convexe des p éléments $x_1, \dots, x_p \in E$ s'il existe des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ positifs ou nuls tels que

$$x = \sum_{i=1}^p \lambda_i x_i \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^p \lambda_i = 1.$$

- 1) Montrer que l'ensemble $\text{Conv}(H)$ des combinaisons convexes d'éléments de H est convexe et qu'il est inclus dans toute partie convexe de E qui contient H .

On appellera dans la suite *enveloppe convexe* de H cette partie de E .

- 2) On suppose dans cette question que E est de dimension finie et on note $n = \dim E$. On souhaite montrer que $\text{Conv}(H)$ est l'ensemble des combinaisons convexes d'au plus $n + 1$ éléments de H .

On considère $x = \sum_{i=1}^p \lambda_i x_i$ une combinaison convexe de $x_1, \dots, x_p \in H$ où $p \geq n + 2$.

- a) En considérant la famille $(x_2 - x_1, x_3 - x_1, \dots, x_p - x_1)$, montrer qu'il existe p réels non tous nuls $\mu_1, \dots, \mu_p$ tels que

$$\sum_{i=1}^p \mu_i x_i = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^p \mu_i = 0.$$

- b) En déduire que x s'écrit comme combinaison convexe d'au plus $p - 1$ éléments de H et conclure que $\text{Conv}(H)$ est constituée des combinaisons convexes d'au plus $n + 1$ éléments de H . On pourra considérer une suite de coefficients de la forme $\lambda_i - \theta \mu_i \geq 0$, $i \in \{1, 2, \dots, p\}$ pour un réel θ bien choisi.

- 3) a) Montrer que l'ensemble

$$\Delta = \left\{ (t_1, \dots, t_{n+1}) \in \mathbb{R}_+^{n+1}, \sum_{i=1}^{n+1} t_i = 1 \right\}$$

est une partie compacte de $\mathbb{R}^{n+1}$.

- b) En déduire que si E est de dimension finie et si H est compact alors $\text{Conv}(H)$ est encore compact.

Exercice II

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ muni d'une norme $\|\cdot\|$.

- 1) Soit F un sous-espace de dimension finie de E . Soit $x \in E \setminus F$. On pose $\delta = d(x, F)$. On rappelle que δ est le plus grand minorant de l'ensemble $\{d(x, f), f \in F\}$. Il se peut que δ n'appartienne pas à cet ensemble.

- a) Montrer que $\delta > 0$.

- b) Montrer qu'il existe un élément f de F tel que $\|x - f\| \leq 2\delta$.

- c) On pose $u = \frac{x - f}{\|x - f\|}$. Montrer que $d(u, F) \geq \frac{1}{2}$.

- 2) On suppose E de dimension infinie. On note $B = \overline{B}(0_E, 1)$ la boule unité fermée de $(E, \|\cdot\|)$. En déduire que B n'est pas compacte.