

Notations et conventions

- Dans ce problème, n désigne un entier supérieur ou égal à 2.
- On confond vecteur de $\mathbb{R}^n$ et matrice colonne correspondante, ce qui permet des écritures du type Ax où A est une matrice carrée réelle de taille n et x un élément de $\mathbb{R}^n$.
- Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ et si x est un élément de $\mathbb{R}^n$, on note

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))$$

ce qui, compte tenu de la convention précédente, s'écrit aussi

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix}$$

Si i et j sont deux entiers de $\llbracket 1, n \rrbracket$, la j -ème dérivée partielle de f_i en x est notée $\partial_j f_i(x)$ ou $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)$

- Le déterminant d'une matrice carrée A est noté $\det(A)$.
- Avec les notations précédentes, on appelle matrice jacobienne de f en x et on note J_f la matrice carrée réelle de taille n dont le terme situé sur la i -ème ligne et la j -ème colonne est $\partial_j f_i$,

Partie I - Matrice jacobienne symétrique, antisymétrique

Au début de la partie f désigne une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}^n$ dans lui même.

Si i, j et k sont trois entiers de $\llbracket 1, n \rrbracket$, la dérivée partielle seconde de f_k en x par rapport aux variables x_i et x_j est notée $D_{i,j} f_k(x)$ ou $\frac{\partial^2 f_k}{\partial x_i \partial x_j}(x)$, ou encore $f_{i,j,k}(x)$.

- Justifier que, pour tout x dans $\mathbb{R}^n$ et tous i, j et k dans $\llbracket 1, n \rrbracket$, on a $f_{i,j,k}(x) = f_{j,i,k}(x)$.
- Dans les questions a), b), c), on suppose que la matrice jacobienne J_f est antisymétrique pour tout x dans $\mathbb{R}^n$.
 - Montrer que pour tout x dans $\mathbb{R}^n$, et tous i, j et k dans $\llbracket 1, n \rrbracket$, $f_{i,j,k}(x) = -f_{i,k,j}(x)$.
 - En déduire que, pour tout x dans $\mathbb{R}^n$ et tous i, j et k dans $\llbracket 1, n \rrbracket$, on a $f_{i,j,k}(x) = 0$.
 - Montrer que J_f est constante.
En déduire qu'il existe une matrice carrée réelle A de taille n et un élément b de $\mathbb{R}^n$ tels que pour tout x dans $\mathbb{R}^n$, $f(x) = Ax + b$.
Justifier que A est antisymétrique.
- Soit g de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $f : x \mapsto \nabla g(x)$
Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et que sa jacobienne est symétrique en tout point de $\mathbb{R}^n$.
 - Réciproquement, soit f est de classe $\mathcal{C}^1$ telle que sa jacobienne est symétrique en tout point de $\mathbb{R}^n$.

On considère l'application g de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}$ définie par $g(x) = \sum_{i=1}^n x_i \int_0^1 f_i(tx) dt$

Montrer que pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et tout $x \in \mathbb{R}^n$, la $j^{\text{ème}}$ dérivée partielle de g en x est définie et égale à $f_j(x)$.

Conclure.

Partie II - Matrice jacobienne orthogonale

Dans cette partie, f est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même.

On considère la proposition

($\mathcal{P}$) Pour tout x de $\mathbb{R}^n$, la matrice jacobienne $J_f(x)$ de f est orthogonale.

Pour x dans $\mathbb{R}^n$ et i, j, k dans $\llbracket 1, n \rrbracket$, on note

$$\alpha_{i,j,k}(x) = \sum_{p=1}^n \frac{\partial f_p}{\partial x_i}(x) \cdot \frac{\partial^2 f_p}{\partial x_j \partial x_k}(x)$$

4) On suppose ($\mathcal{P}$).

a) Montrer que pour tous i, j et k de $\llbracket 1, n \rrbracket$, $\alpha_{i,j,k} = \alpha_{i,k,j} = -\alpha_{k,j,i}$.

b) En déduire que pour tous i, j et k de $\llbracket 1, n \rrbracket$, $\alpha_{i,j,k} = 0$.

c) Montrer qu'il existe une matrice orthogonale A et un élément b de $\mathbb{R}^n$ tels que, pour tout x de $\mathbb{R}^n$,
 $f(x) = Ax + b$

On pourra interpréter les relations $\alpha_{i,j,k} = 0$ à l'aide de produits matriciels.

5) Examiner la réciproque.

6) Si g est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, on note $\Delta_g(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 g}{\partial x_i^2}$ (laplacien de g en x).

Montrer que ($\mathcal{P}$) est équivalente à la proposition

($\mathcal{Q}$) Pour toute fonction g de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, $\Delta_{g \circ f} = (\Delta_g) \circ f$.