

Calculatrices interdites. L'exercice et le problème sont indépendants.

Exercice

Soit $N \in \mathbb{N}$.

On considère une suite (X_n) de variables aléatoires indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ suivant toutes la loi uniforme sur $\{0, 1, \dots, N\}$. On pose alors pour tout entier p non nul, $Y_p = X_1 + \dots + X_p$.

- 1) Déterminer la loi de Y_2 .
- 2) a) Soit $q \in \mathbb{N}$, montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{i=0}^k \binom{i+q}{q} = \binom{k+q+1}{q+1}.$$

- b) En déduire que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \leq N$,

$$\mathbf{P}(Y_p = k) = \frac{1}{(N+1)^p} \binom{k+p-1}{p-1}$$

On pourra procéder par récurrence.

On note T le numéro p du tirage tel que pour la première fois la somme Y_p soit strictement supérieure à N :

$$\begin{aligned} T : \Omega &\rightarrow \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\} \\ \omega &\mapsto \min \{p \in \mathbb{N}^*, Y_p(\omega) > N\} \end{aligned}$$

Si pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $Y_p(\omega) \leq N$ on pose $T(\omega) = +\infty$.

- 3) Justifier que T est une variable aléatoire discrète.
On exprimera en particulier $(T = +\infty)$ en fonction des variables aléatoires $(Y_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$.
- 4) a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\mathbf{P}(T > k)$.
b) Déterminer un équivalent de $\mathbf{P}(T > k)$ quand $k \rightarrow +\infty$.
c) En déduire que l'événement $(T = +\infty)$ est négligeable.

Problème

Notations et définitions

Dans tout le problème, \mathbb{K} désigne \mathbb{R} ou \mathbb{C} et n un entier naturel non nul.

On note $\mathbb{K}_n[X]$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n à coefficients dans \mathbb{K} et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la \mathbb{K} -algèbre des matrices carrées de taille n à coefficients dans \mathbb{K} . La matrice unité est notée I_n et on désigne par $GL_n(\mathbb{K})$ le groupe des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note A^\top la transposée de la matrice A , $\text{rg}(A)$ son rang, $\text{tr}(A)$ sa trace, $\chi_A = \det(XI_n - A)$ son polynôme caractéristique, π_A son polynôme minimal et $\text{sp}(A)$ l'ensemble de ses valeurs propres dans \mathbb{K} .

Dans tout le problème, E désigne un espace vectoriel sur le corps \mathbb{K} de dimension finie n , et $\mathcal{L}(E)$ est l'algèbre des endomorphismes de E . On note f un endomorphisme de E .

On note $f^0 = \text{Id}_E$ et $\forall k \in \mathbb{N}$, $f^{k+1} = f^k \circ f = f \circ f^k$.

Si $Q \in \mathbb{K}[X]$ avec $Q(X) = a_0 + a_1X + \dots + a_mX^m$, $Q(f)$ désigne l'endomorphisme $a_0\text{Id}_E + a_1f + \dots + a_mf^m$. On note $\mathbb{K}[f]$ la sous-algèbre commutative de $\mathcal{L}(E)$ constituée des endomorphismes $Q(f)$ quand Q décrit $\mathbb{K}[X]$.

De même, on utilise les notations suivantes, similaires à celles des matrices, pour un endomorphisme f de E : $\text{rg}(f)$, $\text{tr}(f)$, χ_f , π_f et $\text{sp}(f)$.

Enfin, on dit que f est *cyclique* si et seulement s'il existe un vecteur x_0 dans E tel que $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ soit une base de E .

Partie I - Matrices compagnes et endomorphismes cycliques

I.A. Généralités

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- 1) Montrer que M et M^\top ont même spectre.
- 2) Montrer que M^\top est diagonalisable si et seulement si M est diagonalisable.

I.B. Matrices compagnes

- 3) Soit $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ et $Q(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_0$.

On considère la matrice dite compagne de Q

$$C_Q = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots & -a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Déterminer en fonction de Q le polynôme caractéristique de C_Q .

- 4) Soit λ une valeur propre de C_Q^\top . Déterminer la dimension et une base du sous-espace propre associé.

I.C. Endomorphismes cycliques

- 5) Montrer que f est cyclique si et seulement s'il existe une base \mathcal{B} de E dans laquelle la matrice de f est de la forme C_Q , où Q est un polynôme unitaire de degré n .
- 6) Soit f un endomorphisme cyclique. Montrer que f est diagonalisable si et seulement si χ_f est scindé sur \mathbb{K} et a toutes ses racines simples.
- 7) Montrer que si f est cyclique, alors $(\text{Id}, f, f^2, \dots, f^{n-1})$ est libre dans $\mathcal{L}(E)$ et le polynôme minimal de f est de degré n .

I.D. Application à une démonstration du théorème de Cayley-Hamilton

On ne suppose plus f cyclique.

- 8) Soit x un vecteur non nul de E . Montrer qu'il existe un entier p strictement positif tel que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{la famille } (x, f(x), f^2(x), \dots, f^{p-1}(x)) \text{ est libre} \\ \text{et} \\ \exists (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{p-1}) \in \mathbb{K}^p \text{ tel que : } \alpha_0 x + \alpha_1 f(x) + \dots + \alpha_{p-1} f^{p-1}(x) + f^p(x) = 0_E \end{array} \right.$$

- 9) Justifier que $\text{Vect}(x, f(x), f^2(x), \dots, f^{p-1}(x))$ est stable par f .
- 10) Montrer que $X^p + \alpha_{p-1}X^{p-1} + \dots + \alpha_0$ divise le polynôme χ_f .
- 11) Retrouver que $\chi_f(f)$ est l'endomorphisme nul.

Partie II - Endomorphismes commutants, décomposition de Frobenius

On appelle commutant de f l'ensemble $\mathcal{C}(f) = \{g \in \mathcal{L}(E) / f \circ g = g \circ f\}$.

- 12) Montrer que $\mathcal{C}(f)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$.

II.A. Commutant d'un endomorphisme cyclique

On suppose que f est cyclique et on choisit un vecteur x_0 dans E tel que $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ est une base de E .

Soit $g \in \mathcal{C}(f)$, un endomorphisme qui commute avec f .

- 13) Justifier l'existence de $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ de \mathbb{K} tels que

$$g(x_0) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k f^k(x_0)$$

- 14) Montrer alors que $g \in \mathbb{K}[f]$.
- 15) Établir que $g \in \mathcal{C}(f)$ si et seulement s'il existe un polynôme $R \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ tel que $g = R(f)$.

II.B. Décomposition de Frobenius

On se propose de démontrer le théorème de décomposition de Frobenius : toute matrice est semblable à une matrice diagonale par blocs dont les blocs diagonaux sont des matrices compagnons.

On note d le degré de π_f .

16) Soit $x \in E$. On note $I_{f,x} = \{P \in \mathbb{K}[X] / P(f)(x) = 0_E\}$.

a) Montrer qu'il existe un unique polynôme unitaire noté $\pi_{f,x} \in \mathbb{K}[X]$ tel que $I_{f,x} = \pi_{f,x}\mathbb{K}[X]$ et que $\pi_{f,x}$ divise π_f .

b) On note d_x le degré de $\pi_{f,x}$. Montrer que $(x, f(x), \dots, f^{d_x-1}(x))$ est libre.

17) a) Montrer que si la réunion de deux sous-espaces vectoriels F et G de E est un sous-espace vectoriel, l'un contient l'autre.

On admet que ce résultat se généralise ainsi : si F_1, \dots, F_r sont des sous-espaces vectoriels dont la réunion est un sous-espace vectoriel, alors l'un des sous-espaces F_i contient tous les autres.

b) En déduire qu'il existe un vecteur x_1 de E tel que $d_{x_1} = d$.

On pourra considérer les sous-espaces vectoriels $\text{Ker}(\pi_{f,x}(f))$.

On considère x_1 un élément de E tel que $d_{x_1} = d$.

On pose $e_1 = x_1, e_2 = f(x_1), \dots, e_d = f^{d-1}(x_1)$ et $E_1 = \text{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_d)$.

18) Montrer que $E_1 = \{P(f)(x_1) / P \in \mathbb{K}[X]\}$ et que E_1 est stable par f .

On note ψ_1 l'endomorphisme induit par f sur le sous-espace vectoriel E_1 ,

$$\psi_1 : \begin{cases} E_1 \rightarrow E_1 \\ x \mapsto f(x) \end{cases}$$

19) Justifier que ψ_1 est cyclique. En déduire que si $d = n$ alors f est cyclique.

On complète, si nécessaire, (e_1, e_2, \dots, e_d) en une base (e_1, e_2, \dots, e_n) de E . Soit Φ la d -ième forme coordonnée qui à tout vecteur x de E associe sa coordonnée suivant e_d dans la base (e_1, \dots, e_n) . On note $F = \{x \in E / \forall i \in \mathbb{N}, \Phi(f^i(x)) = 0\}$.

20) Montrer que F est stable par f et que E_1 et F sont en somme directe.

Soit Ψ l'application linéaire de E dans \mathbb{K}^d définie, pour tout $x \in E$, par

$$\Psi(x) = (\Phi(f^i(x)))_{0 \leq i \leq d-1} = (\Phi(x), \Phi(f(x)), \dots, \Phi(f^{d-1}(x)))$$

21) Montrer que Ψ induit un isomorphisme entre E_1 et \mathbb{K}^d .

22) Montrer que $E = E_1 \oplus F$.

23) En déduire qu'il existe r sous-espaces vectoriels de E , notés E_1, \dots, E_r , tous stables par f , tels que :

— $E = E_1 \oplus \dots \oplus E_r$;

— pour tout $1 \leq i \leq r$, l'endomorphisme ψ_i induit par f sur le sous-espace vectoriel E_i est cyclique ;

— si on note P_i le polynôme minimal de ψ_i , alors P_{i+1} divise P_i pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq r-1$.

II.C. Commutant d'un endomorphisme quelconque

24) Montrer que la dimension de $\mathcal{C}(f)$ est supérieure ou égale à n .

25) On suppose que f est un endomorphisme tel que l'algèbre $\mathcal{C}(f)$ est égale à $\mathbb{K}[f]$. Montrer que f est cyclique.

Partie III - Preuve du résultat admis à la question 17

26) Démontrer le résultat admis à la question 17.